Содержание

Предисловие

19 апреля 1610 года, получив сигнальный экземпляр «Звездного вестника» Галилея, Иоганн Кеплер написал письмо от почитателя. «Наверное, может показаться, что я тороплюсь согласиться с Вашими утверждениями так безоговорочно, не имея для того оснований в собственном опыте, – писал Кеплер Галилею. – Но с какой стати я не должен доверять самому ученому математику, стиль которого уже свидетельствует об основательности его суждений?»[1] Сегодня нам непривычно говорить о работе математика в терминах стиля. Доказательство – это форма рассуждения, но истинность доказываемой теоремы вряд ли зависит от риторических изысков, не говоря уже о стилистических особенностях. Накопленная веками мудрость убеждает нас, что у математики, универсального языка науки, есть только один стиль – *математический*, – который характеризуется символической нотацией, абстракцией и логической строгостью[2].

Цель этой книги – поставить под сомнение такое понимание математики. Хотя вера в универсальность и единство *ars mathematica* не лишена оснований, стоит на минутку задуматься, как возникает целый ряд важных вопросов. Откуда берет начало «правильный» математический стиль? Как он развивался по мере накопления математических знаний? Какие возможности он открывает или, наоборот, исключает? Как его потенциал эволюционировал вместе с изменениями в форме написания, а стало быть, и чтения математических работ? Каковы его выразительные, познавательные и образные возможности?

Эти вопросы, по существу, относятся к математической *литературе*. Представить обзор этой литературы – огромного материала, тематически простирающегося от алгебры до геометрии, от теории чисел до физики, от логики до статистики, а по времени от вавилонских глиняных табличек бронзового века до современных рецензируемых журналов и электронных препринтов – очевидно невозможно в книге такого объема. Вместо этого я опишу одно сечение математики, вдохновляясь эссе Раймона Кено «*Упражнения в стиле*»[i]. В этой литературной работе, написанной в 1947 году, одна и та же история – странного человека, которого мы впервые наблюдаем спорящим в автобусе, а затем в беседе с приятелем о положении пуговицы на пиджаке, – изложена девяносто девятью разными способами. Стилистические экзерсисы Кено дают примеры различных форм прозы, поэзии и разговорной речи, но встречаются и более интересные изыски, например «Ономатопея», «Вульгарное» и «Перекрестные перемещения групп букв». Кено был не только автором и поэтом, но и математиком-любителем и вместе с историком математики Франсуа ле Лионнезом основал экспериментальную группу писате-

[i] *Раймон Кено.* Упражнения в стиле / пер. М. Голованивской. М.: Има-пресс, 1992.

лей под названием Oulipo. Название группы, состоящей в основном из пишущих по-французски, – акроним от *Ouvroir de Litérature Potentielle* (Мастерская потенциальной литературы). В ней состояли писатели, художники и математики, в т. ч. Жорж Перек, Итало Кальвино, Марсель Дюшан, Жак Рубо, Клод Берже и Мишель Оден. Провозглашенная цель группы – исследовать возможности литературы, вытекающие из вдохновленных математикой правил и ограничений[3]. Узнав об Oulipo и книге Кено, я захотел посмотреть, как ограничения на письменное изложение могли бы отразиться на математическом повествовании – доказательстве.

Темой книги «99 вариаций доказательства» я выбрал кубическое уравнение, и в каждой главе доказывается одна и та же несложная – кто-то даже скажет, тривиальная, – теорема о его решениях. Многие доказательства, от 16 «Древнее» до 61 «Современное», берут начало в математической литературе по кубическим уравнениям. В некоторых случаях это не потребовало никакой обработки с моей стороны; самый разительный пример – доказательство 7 «Обретенное», которое я нашел в уже готовом виде на странице самого известного трактата по математике эпохи Возрождения. Но чаще вариации требовали значительного объема интерпретации и придумывания. Иногда это было связано с тем, что стиль зародился в области, далекой от кубических уравнений, как в случае 6 «Аксиоматическое» или основанного на физике доказательства 96 «Электростатическое». Еще больше усилий потребовалось для перевода на язык математики стилей, с математикой вообще не связанных, как, например, музыкальная партитура в доказательстве 26 «Акустическое» и архитектурное доказательство 62 «Аксонометрическое».

Некоторые доказательства удовлетворяют конкретному стандарту строгости, другие не отвечают современным стандартам, а есть и такие, перед которыми ставились совершенно иные цели.

Все вариации, за немногими исключениями, умещаются на одной странице, а их краткое обсуждение находится на обороте этой страницы. Вспомогательный текст включает подробные объяснения, сведения об источниках и мои замечания о природе и значимости каждого стиля. Перекрестные ссылки на связанные вариации приглашают читателя отойти от выбранного мной, исходя из собственных соображений, порядка глав, и читать книгу, как ему удобно.

Это не математический трактат по кубическим уравнениям, да и сам выбор конкретного уравнения был сделан почти произвольно. Несмотря на исторические аллюзии, на которые намекают названия глав, это не книга[4] по истории математики. Хотя онтологический характер содержания и стиля может стать предметом спора, это все же не философская работа. Это книга *о* математике, ее отношении к миру, ее нормам, воззрениям и практикам – короче говоря, о ее культуре.

Существуют и другие сопоставимые исследования математического доказательства, в которых связь между формой и содержанием рассматривается разными способами. В 1938 году некто H. Pétard опубликовал работу «К математической теории охоты», в которой предложил 38 приложений современной математики и физики к задаче о поимке льва[5]. Во время написания этой книги появилось еще две математические вариации на тему «Упражнений» Кено: Ludmila Duchêne, Agnès Leblanc «Rationnel mon Q» и John McCleary «Exercises in (Mathematical) Style». Между этими книгами по необходимости имеется некоторое перекрытие, но удивительно то, насколько сильно исследования стиля могут сами отличаться по стилю. Это само по себе подтверждает истинность основного посыла оригинала Кено.

Что отличало стиль самого ученого математика, Галилея? Согласно Итало Кальвино, «для него хорошее мышление означало быстроту, гибкость рассуждений, экономию аргументов, но также использование образных примеров»[6]. Этот член Oulipo находит самое яркое проявление галилеева стиля в следущем пассаже из книги Галилея «Пробирных дел мастер»[i], вышедшей в 1623 году: критикуя стремление своего оппонента опираться на авторитеты в своей аргументации, Галилей утверждает: «но беседа сродни охоте на зайца, а не перевозке грузов, а один берберийский скакун обгонит сотню фризских тяжеловозов»[7]. Кальвино называет это галилеевским «исповеданием веры – стиль как метод мышления и как признак литературного вкуса»[8]. Это то кредо, которому я старался следовать.

На протяжении всего этого проекта я руководствовался одним желанием: попытаться представить математику как литературную или эстетическую среду. Хватает свидетельств в пользу того, что профессиональные математики описывают свою работу в эстетических терминах, но терминология, которой они пользуются, по крайней мере публично, сильно ограничена. Часто повторяемые слова «красота» и «элегантность», возможно, и являются важными составными частями математического вкуса, но не передают его широту, утонченность и связи с литературным и эстетическим опытом за пределами математики[9]. Девяносто девять (или, если вы согласны принять опущенное доказательство за таковое, то ровно сто) доказательств служат одной цели – продемонстрировать существенные различия в логике, манере выражения мыслей, выборе образного ряда и даже типографского шрифта – всего того, что придает характерный вкус и аромат математике[10]. Я надеюсь, что читатели, не имеющие или почти не имеющие каких-то предрасположений к обсуждаемому предмету, начнут воспринимать эти стилистические различия, просто просматривая пример по диагонали, задерживаясь на тех, что затронули – или оскорбили – их чувства, и с легким сердцем оставляя позади те, что оставили их равнодушными. Читатель, склонный к углублению в предмет, возможно, заметит, что сама книга представляет собой математическую игру. В любом случае, если, пройдя через руки читателя, математика станет более яркой, значит, книга достигла своей цели.

[i] *Галилео Галилей.* Пробирных дел мастер. М.: Наука, 1987.

Теорема. *Если* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$, *то* $x = 1$ *или* $x = 4$.

Доказательство. Опущено. $\square$

К чему вообще доказательство? Авторы часто опускают доказательство по разным причинам, в т. ч. из соображений эстетики. В стандартном вузовском учебнике по общей алгебре мы встречаем такую фразу: «Доказательство этого предложения громоздко и некрасиво и при этом не содержит ничего интересного, поэтому мы его опускаем»[11]. Читатели часто прощают такие пропуски в чисто информационных работах, но вообще принимать математику на веру следует с осторожностью.

Прежде чем переходить к доказательству этого предложения, громоздкому или нет, следует отметить несколько его особенностей.

Нам дано алгебраическое уравнение, содержащее несколько чисел, неизвестную величину x, ее квадрат x^2 и ее куб x^3. Таким образом, мы имеем *алгебраическое* уравнение *третьей степени*, или просто *кубическое* уравнение. В более стандартной форме все члены уравнения собираются в одной части от знака равенства, например $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$. Это первая особенность, и несколько доказательств начинаются с приведения к нормальному виду. Но на самом деле это вторая особенность предложенной теоремы, а *первая* заключается в том, что она ничего не говорит о *природе x*. Некоторые читатели математической литературы готовы смириться с опущенным доказательством, но введение переменной без указания области ее определения – всеми осуждаемый грех умолчания. Почему? Потому что это прямой путь к неоднозначности. Но для нашей цели исследования стиля это весьма продуктивная неоднозначность – термин, введенный в обиход американским философом и поэтом Эмили Грошольц[12].

И последняя, наиболее интересная с точки зрения математики, особенность заключается в том, что у этого кубического уравнения всего два решения. Если вы не забыли формулу корней квадратного уравнения с ее знаками ±, то, наверное, помните, что уравнение второй степени имеет два корня. И хотя я еще не встречал человека, который помнил бы наизусть *формулу корней кубического уравнения*, она существует (см. доказательство 30 «Полученное по формуле») и дает *три* корня для любого уравнения третьей степени. Отсутствие третьего корня, отличного от первых двух, технически означает, что наше уравнение является *вырожденным случаем*.

1
Однострочное

Теорема. *Пусть* x *– вещественное число. Если* $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$, *то* $x = 1$ *или* $x = 4$.

Доказательство. После вычитания получаем уравнение $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$, которое раскладывается на множители $(x - 1)^2(x - 4) = 0$. □

Однострочное

Математики, как и поэты, часто стремятся к экономии, а однострочное доказательство – своего рода моностих. Даже аббревиатура ЧТД (что и требовалось доказать), которой традиционно завершают доказательство, по современным стандартам, слишком пространна. Вместо нее мы встречаем квадратик □, который часто называют халмошем, в честь американского математика венгерского происхождения Пола Халмоша, впервые ставшего употреблять его в математических текстах. Экономия – идеал, который не ограничивается только доказательствами, а распространяется и на более крупные работы. Как-то раз в «Бюллетене Американского математического общества» появилась научная статья, написанная двумя специалистами по теории чисел, которая состояла всего из двух предложений[13]. Есть у меня подозрение, что авторы просто не смогли договориться об одном.

Несколько загадочное предложение, приведенное выше, по крайней мере оставляет читателю возможность чем-то заняться. Давайте-ка, приведите подобные члены и отыщите эти множители.

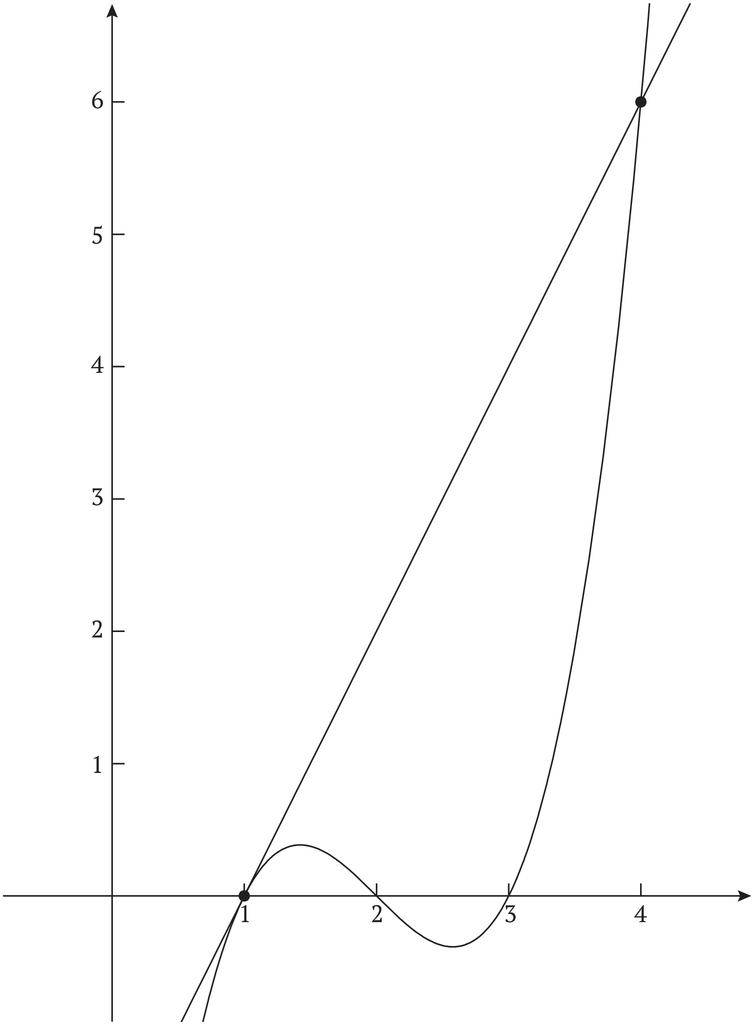
Дано: $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$, где x – вещественное число.
Доказать: $x = 1$ или 4.

	Утверждение	**Причина**
1.	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$	Дано
2.	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 + 2 = 2x - 2 + 2$	Прибавление к обеим частям уравнения
3.	$x^3 - 6x^2 + 11x - 4 = 2x$	Сложение
4.	$x^3 - 6x^2 + 11x - 4 - 2x = 2x - 2x$	Вычитание из обеих частей уравнения
5.	$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$	Вычитание
6.	$x^3 - (1 + 5)x^2 + (5 + 4)x - 4 = 0$	Сложение
7.	$x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 4x - 4 = 0$	Дистрибутивность
8.	$x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 4(x - 1)$	Разложение на множители
9.	$(x^2 - 5x + 4)(x - 1) = 0$	Разложение на множители
10.	$[x^2 - (1 + 4)x + 4](x - 1) = 0$	Сложение
11.	$(x^2 - x - 4x + 4)(x - 1) = 0$	Дистрибутивность
12.	$[x(x - 1) - 4(x - 1)](x - 1) = 0$	Разложение на множители
13.	$[(x - 4)(x - 1)](x - 1) = 0$	Разложение на множители
14.	$x - 1 = 0$ или $x - 4 = 0$	Произведение равно нулю
15.	$x - 1 + 1 = 1$ или $x - 4 + 4 = 4$	Прибавление к обеим частям уравнения
16.	$x = 1$ или $x = 4$	Сложение
		ЧТД

Эта форма знакома ученикам американских средних школ, которые будут не так уж неправы, полагая, что придумана она, чтобы упростить выставление оценок, а не для лучшего понимания материала. Добавление пятнадцати строк к предыдущему доказательству не углубляет соразмерно проникновение в предмет, сколько бы уверенности ни пыталась вселить вертикальная черта, отделяющая шаг доказательства слева от его обоснования справа.

Более того, за выигрыш в логической прозрачности приходится расплачиваться отсутствием ясной риторики. Двухстолбцовый формат освобождает ученика от необходимости печься о стиле, не говоря уже о грамматике. Согласно Патрисио Хербсту, профессору факультета образовательных исследований и математики Мичиганского университета, это, возможно, и было целью доказательства в два столбца. В статье «Establishing a Custom of Proving in American School Geometry: Evolution of the Two-Column Proof in the Early Twentieth Century» он пишет: «по мере того как учащиеся должны были заучивать наизусть доказательства геометрических теорем, утрачивалась умственная дисциплина, которую воспитывала геометрия. Необходимы были методические изменения, чтобы геометрия могла выполнить свою работу.... [Двухстолбцовый формат] дал учащимся «объективное» представление, облегчившее осознание сходства между такими разными действиями, как доказывание фундаментальных утверждений и решение задач на доказательство»[14].

В доказательстве 18 «С отступами» мы встретим развитие доказательства в два столбца.



3
Иллюстрированное

Кубическая кривая $y = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ пересекается с прямой $y = 2x - 2$ в двух точках: (1, 0) и (4, 6).

Когда я показал черновые варианты нескольких десятков доказательств коллеге-физику, тот объявил это *настоящим* доказательством. В некотором смысле он был прав. Первоначально я подумывал о том, чтобы сформулировать теорему в виде утверждения о пересечении двух графиков.

Но этот пример «доказательства путем взгляда на рисунок» не считается доказательством по стандартам большинства математиков. Откуда уверенность в том, что кривые действительно пересекаются именно в этих двух точках? А что происходит за пределами нарисованной области? Это напоминает мне историю, рассказанную французским математиком Этьеном Гизом. После выступления на семинаре Бурбаки (см. комментарии к доказательству 6 «Аксиоматическое»), посвященного геометрическому построению, которое включало иллюстрации, к нему подошел знаменитый французский математик и лауреат премии Филдса Жан-Пьер Серр и заметил: «То, что вы рассказали, было интересно. Но у меня есть вопрос. Вы и правду считаете это теоремой?»[15] Тем не менее начерченные компьютером графики, равно как построения циркулем и линейкой (см. доказательство 12) и рисунки на доске (см. доказательство 21), – действенные инструменты обнаружения математических фактов и сообщения о них.

Предложение. *Если x – вещественное число и $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$, то $x = 1$ или $x = 4$.*

Доказательство. Это уравнение третьей степени можно записать в стандартной форме $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$. Представим линейный член $9x$ в виде суммы $5x + 4x$, так чтобы стало очевидным наличие общего множителя в левой части.

$$(x^3 - 6x^2 + 5x) + (4x - 4) = (x^2 - 5x)(x - 1) + 4(x - 1).$$

Вынесение за скобки $x - 1$ оставляет квадратный трехчлен, который тоже легко разлагается на множители.

$$(x^2 - 5x + 4)(x - 1) = (x - 4)(x - 1)(x - 1).$$

Поскольку правая часть равна 0, по крайней мере один из множителей, $(x - 1)$ или $(x - 4)$, должен быть равен нулю. Таким образом, $x = 1$ или $x = 4$.

Элементарное

Экономия средств не менее ценна, чем экономия формы. Я считаю доказательство *элементарным*, если аргументация опирается только на базовые техники в той области, к которой относится предложение, а судить об этой области позволяет терминология. В этом смысле элементарное доказательство – естественно возникающее ограничение для математического *рассуждения*. Другие формы рассуждений и методов включают доказательство сведением к противоречию (см. доказательство 13) и подстановкой (см. доказательство 22).

Авторы учебников и учебных курсов по математике часто пытаются организовать материал так, чтобы учащийся видел только проблемы, элементарные в указанном смысле. Вероятно, это послужило основанием для широко распространенного предположения о том, что сама математика развивается, следуя тому же логическому шаблону. Контрпримером может служить теорема о простых числах, которая описывает рост среднего расстояния между соседними простыми числами при их увеличении. Этот результат относится к теории чисел, но математикам потребовалось полстолетия, чтобы найти теоретико-числовое доказательство теоремы, которая первоначально была доказана средствами комплексного анализа.

Существует ли элементарный стиль записи математических результатов? Если да, то я думаю, что лучше всего его выразил знаменитый венгерский математик и педагог Дьёрдь Пойа:

> Правила стиля. Первое правило стиля: иметь, что сказать. Второе правило стиля: контролировать себя, когда, по стечению обстоятельств, нужно сказать две вещи; сначала говорите одно, потом второе, но не то и другое одновременно[16].

5
Головоломка

Пусть имеется четыре последовательных числа и произведение первых трех равно удвоенному третьему. Чему равно четвертое число?

Ответ: 4.

Быть может, первым возникает вопрос «А при чем тут уравнение?» Но есть вопросы и посерьезнее. В статье, озаглавленной «Для чего нужна математика?», американский математик Андервуд Дадли заключает: «В математике задачи могут быть решены путем рассуждения, а решения можно проверить и продемонстрировать их правильность… Для этого и предназначено математическое образование, и так было всегда: научить рассуждать, обычно на примере глупых задач»[17].

Текстовая задача, изложенная в доказательстве 68, – пожалуй, самый распространенный жанр глупых задач в преподавании математики.

Чтобы понять, как ответ на эту головоломку решает (или не решает) наше уравнение, обозначим четвертое число x. Тогда три последовательных числа, предшествующих x (в предположении, что они целые), равны в порядке возрастания $x - 3$, $x - 2$, $x - 1$. Если их произведение равно удвоенному третьему числу, то $(x - 3)(x - 2)(x - 1) = 2(x - 1)$. Перемножение этих чисел – дело муторное, но после приведения результата в порядок получается уравнение из доказательства 0 «Опущенное».

6
Аксиоматическое

Обозначения

Нуль и единица – числа, обозначаемые соответственно 0 и 1. Суммой чисел x и y называется результат сложения x и y, она обозначается $x + y$. Произведением чисел x и y называется результат умножения x и y, оно обозначается $x \times y$ или $x \times y$. Числа x и y равны, если они совпадают, этот факт обозначается $x = y$.

Определения

1. Числа от 2 до 11 определяются как суммы $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$, ..., $11 = 10 + 1$.
2. *Обратным относительно сложения* для числа x называется число $-x$ такое, что $x + (-x) = 0$.
3. *Разность* двух чисел x и y обозначается $x - y$ и определяется как сумма $x + (-y)$.
4. *Квадратом* числа x называется произведение x с самим собой, он обозначается x^2.
5. *Кубом* числа x называется произведение x и его квадрата, он обозначается x^3.

Аксиомы

6. Для любого предложения P если P или P, то P.
7. Для любых чисел x и y если $x = y$, то $y = x$.
8. Для любых чисел x, y и z если x равно y и y равно z, то x равно z.
9. Для любых чисел x и y и любого равенства E если x равно y, то y можно подставить вместо любого вхождения x в E, и значение истинности E при этом не изменится.
10. Если x и y – числа, то сумма $x + y$ и произведение $x \times y$ – тоже числа.
11. Для любых чисел x, y и z если x равно y, то суммы $x + z$ и $y + z$ равны, точно так же, как произведения $x \times z$ и $y \times z$.
12. Для любых чисел x и y суммы с переменой мест слагаемых $x + y$ и $y + x$ равны, точно так же произведения с переменой мест сомножителей $x \times y$ и $y \times x$.
13. Для любых чисел x, y, z суммы $(x + y) + z$ и $x + (y + z)$ равны, точно так же произведения $(x \times y) \times z$ и $x \times (y \times z)$.
14. Если x, y, z – числа, то произведение x на сумму $y + z$ равно сумме произведений $x \times y + x \times z$.
15. Число 1 не равно числу 0.
16. Для любого числа x сумма $0 + x$ равна x.
17. Для любого числа x произведение $1 \times x$ равно x.
18. Для любого числа x существует единственное обратное относительно сложения $-x$.
19. Для любых чисел x и y если $x \times y = 0$, то $x = 0$ или $y = 0$.

Теоремы

20. Для любых чисел x, y, z если $x = y$, то $x - z = y - z$.
21. Для любого числа x $x - x = 0$.
22. Для любого числа x $0 \times x = 0$.
23. Для любых чисел x и y $(-x)y = -(xy) = x(-y)$.
24. Для любого числа $x - (-x) = x$.
25. Для любых чисел x, y, z $x(y - z) = xy - xz = (y - z)x$.
26. Для любых чисел x, y, z, w $(x - y)(z - w) = xz - xw - yz + yw$.
27. Для любого числа x $x + x = 2x$.
28. Для любых чисел x, y $-(x + y) = -x - y$.
29. $-2 + (-4) = -6$.
30. $1 + 4 \times 2 = 9$.
31. Для любого числа x $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
32. Для любого числа x $(x - 1)^2(x - 4) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$.
33. Для любого числа x $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) - (2x - 2)$.
34. Для любого числа x, если $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$, то $x = 1$ или $x = 4$.

Доказательство. Предположим, что x – число.

Теорема 33	$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (x^3 - 6x^2 + 11x - 6) - (2x - 2)$	(1)
Гипотеза	$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 2x - 2$	(2)
Аксиома 10	$2x - 2$ – число	(3)
Аксиома 9, (1), (2), (3)	$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = (2x - 2) - (2x - 2)$	(4)
Теорема 21, (3)	$(2x - 2) - (2x - 2) = 0$	(5)
Аксиома 8, (4), (5)	$x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$	(6)
Теорема 32	$(x - 1)^2(x - 4) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$	(7)
Аксиома 8, (7), (6)	$(x - 1)^2(x - 4) = 0$	(8)
Аксиома 19, (8)	$(x - 1)^2 = 0$ или $x - 4 = 0$	(9)
Определение 4, (9)	$(x - 1)(x - 1) = 0$ или $x - 4 = 0$	(10)
Аксиома 19, (10)	$x - 1 = 0$ или $x - 1 = 0$ или $x - 4 = 0$	(11)
Аксиома 6, (11)	$x - 1 = 0$ или $x - 4 = 0$	(12)
Определение 3, (12)	$x + (-1) = 0$ или $x + (-4) = 0$	(13)
Аксиома 11, (13)	$x + (-1) + 1 = 0 + 1$ или $x + (-4) + 4 = 0 + 4$	(14)
Определение 2, (14)	$x + 0 = 0 + 1$ или $x + 0 = 0 + 4$	(15)
Аксиома 16, (15)	$x = 1$ или $x = 4$	(Теорема)

Влиятельный немецкий математик Давид Гильберт предлагает одно из самых кратких описаний аксиоматического подхода: «Если мы рассмотрим конкретную теорию более пристально, то всегда обнаружим, что несколько выделяющихся предложений из соответствующей области знаний лежат в основе построения всей системы понятий, и одних этих предложений достаточно для построения всей системы в согласии с принципами логики»[18]. Это доказательство основано на работе итальянского математика Джузеппе Пеано «Принципы арифметики, представленные новым методом», вышедшей в 1889 году[19]. Теорема доказывается в конце последовательности теорем, каждая из которых опирается на одну или несколько аксиом, определений и ранее доказанных теорем. Термины слишком примитивные, чтобы давать им точное определение, считаются просто обозначениями. Может показаться нелепым рассматривать простейшее равенство $1 + 4 \cdot 2 = 9$ как теорему, но этот результат можно логически вывести из сформулированных аксиом[20].

Аксиоматический метод организации знаний в логическую иерархию восходит еще к Евклиду (см. доказательство 52 «Античное»), но в современную эпоху аксиоматические системы приобрели новый вид и значимость. Группа молодых математиков, писавших под коллективным псевдонимом Николя Бурбаки, поставила себе целью выстроить крупные направления своей науки, следуя современному аксиоматическому стилю, вдохновляясь работами Гильберта и знаменитой женщины-алгебраиста Эмми Нётер[21]. В манифесте Бурбаки 1948 года «Архитектура математики» объясняется их взгляд на вещи (курсив мой):

> С аксиоматической точки зрения, математика предстает складом абстрактных форм – математических структур. … Конечно, нельзя отрицать, что у большинства этих форм первоначально было вполне определенное интуитивное содержание; но именно благодаря *осознанному отбрасыванию этого содержания* стало возможно придать этим формам всю ту мощь, на которую они способны, и сделать их пригодными для новых интерпретаций[22].

Оставляя в стороне дерзость этих строк, нетрудно представить себе, что кто-то мог испытывать серьезные трудности при попытке следования этой формалистской программе. Не ставя вопрос о преимуществах подхода Бурбаки, математик и философ Джан-Карло Рота заметил в конце столетия:

> Аксиоматический метод изложения математики в наше время достиг вершины фанатизма… Ясность была принесена в жертву таким фетишам, как согласованность нотации, краткость аргументации и искусственная линейность логически выведенных умозаключений. Некоторые математики заходят так далеко, что заявляют, будто математика и *является* аксиоматическим методом, ни больше ни меньше. Эта претензия на «самоопределение» математики с помощью стиля представления оказывает разрушительное влияние на восприятие математики со стороны ученых, работающих в других дисциплинах[23].

Другие математики обнаружат, что сама математика платит высокую цену за чрезмерное стремление к формализму; см. комментарии к доказательству 33 «Аналитическое».