УДК 517.9
ББК 22.161.166
С80

С80 Джон Стилуэлл

Обратная математика. Доказательства, вывернутые наизнанку / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2021. – 198 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-888-3

Эта книга – первое изложение обратной математики для аудитории, состоящей из математиков общего профиля. Обратная математика – новая дисциплина, которая «выворачивает наизнанку» традиционную математическую логику: ее цель – не вывод теорем, а поиск аксиом, которые позволяют доказать известные теоремы.

Джон Стилуэлл рассказывает о том, как найти «правильные» аксиомы для доказательства фундаментальных теорем. Придерживаясь исторического взгляда на обратную математику, он описывает два ставших возможными благодаря ей направления развития. Первое – проект арифметизации анализа, предпринятый в XIX веке с целью определить все понятия анализа в терминах натуральных чисел и их множеств. Второе – выполненная в XX веке арифметизация математической логики и понятия вычисления. Таким образом, арифметика в некотором смысле лежит в основе анализа, логики и вычислений. Обратная математика опирается на эту идею, рассматривая анализ как арифметику, дополненную аксиомами существования бесконечных множеств.

Книга будет интересна как студентам старших курсов, так и специалистам, интересующимся основаниями математики.

УДК 517.9
ББК 22.161.166

ISBN 978-0-691-19641-1 (англ.)
ISBN 978-5-97060-888-3 (рус.)

Посвящается Элейн

Оглавление

Предисловие

Это книга об основаниях математики – теме, когда-то вызывавшей интерес таких выдающихся математиков, как Дедекинд, Пуанкаре и Гильберт, а сегодня, как это ни грустно, обделенной вниманием. Такое невнимание достойно сожаления по нескольким причинам:

- по мере того как математика разделяется на все больше и больше дисциплин, возрастает потребность в объединяющей точке зрения;
- основания объединяют не только математику, но и такие смежные дисциплины, как информатика и физика;
- недавние достижения в математической логике позволяют по-новому взглянуть на основания анализа и на трудноуловимую концепцию математической «глубины».

Эта книга посвящена в основном последнему пункту, а точнее *обратной математике*.

Как следует из названия, в обратной математике концепция доказательства вывернута наизнанку. Вместо того чтобы выводить следствия из заданных аксиом, мы пытаемся найти аксиомы, необходимые для доказательства заданных теорем. На самом деле это старая идея, по крайней мере в том, что касается оснований геометрии.

Со времен Евклида и вплоть до XIX столетия математикам не давал покоя вопрос, нужна ли аксиома параллельных для доказательства теорем, например теоремы Пифагора. В главе 1 как пример идей обратной математики приводится исторический обзор аксиомы параллельных, а также похожий рассказ об аксиоме выбора в теории множеств.

Хотя обе эти аксиомы иллюстрируют идею обратной математики, в своем современном понимании этот предмет находится в узкой, но важной области, пограничной *между* геометрией и теорией множеств: теории вещественных чисел, которая лежит в основании математического анализа и большей части математической физики. (С обратной математикой связаны также интересные вклады в алгебру, комбинаторику и топологию, но о них мы упомянем более кратко.)

Вещественные числа в том понимании, какое сложилось на сегодняшний день, возникли как результат предпринятых в XIX веке усилий по *арифметизации* анализа и геометрии. Благодаря построению вещественных чисел из множеств рациональных чисел (а значит, в конечном итоге из множеств натуральных чисел) становится возможно представить последовательности вещественных чисел и произвольные непрерывные функции – а стало быть, большинство объектов анализа – множествами натуральных чисел. Мы приведем обзор арифметизации анализа и его основных теорем в главах 2 и 3. А затем будем готовы задаться вопросом: какие *аксиомы* необходимы для доказательства этих основных теорем? В общих чертах ответ такой: система аксиом натуральных чисел (*аксиомы Пеано*) плюс подходящая *аксиома существования множества*.

Сила аксиом существования множеств варьируется в зависимости от того, насколько сильные теоремы мы ходим доказывать. Оказывается, что аксиома наименьшей силы тесно связана с основаниями *вычислений*: она утверждает существование вычислимых множеств. Это, в свою очередь, ведет к изучению концепции вычисления, которое сливается с анализом, т. к. у обоих предметов общие арифметические основания. После неформального введения в теорию вычислимости в главе 4 мы разработаем формальную концепцию вычисления и ее арифметизацию в главе 5.

В главах 6 и 7 идеи анализа, арифметики и вычислений будут сведены в системы аксиом для анализа: RCA_0, WKL_0 и ACA_0. Эти системы аксиом, которые различаются в основном аксиомами существования множеств различной силы, позволяют доказать большинство теорем анализа. Но самое главное, что они относят основные теоремы к трем уровням, поскольку выше «базового» уровня RCA_0 большая часть теорем *эквивалентна* аксиоме существования множества из системы, которая их доказывает. Это делает любую из этих аксиом существования множеств «правильной аксиомой» в смысле Фридмана (1975):

> *Когда теорема доказана, исходя из правильных аксиом, аксиомы можно доказать, исходя из теоремы.*

Мы увидим, в частности, что система RCA_0 позволяет доказать теорему о промежуточном значении; определяющая аксиома системы WKL_0 является правильной для доказательства леммы Гейне–Бореля и теоремы о достижении экстремальных значений, а определяющая аксиома системы ACA_0 – правильная для доказательства критерия сходимости Коши и теоремы Больцано–Вейерштрасса.

Таким образом, в обратной математике мы встречаемся с персонажами, знакомыми по начальному курсу анализа, но в совершенно другом антураже.

В главе 8 мы очертим более полную картину анализа, теории вычислимости и логики, что, как мы надеемся, подготовит читателя к ознакомлению с предназначенными для специалистов изложениями обратной математики и в первую очередь работы Simpson (2009). А эта книга рассчитана в основном на неспециалистов и в некоторых отношениях является продолжением моей книги «*Elements of Mathematics. From Euclid to Gödel*». Здесь теория вычислимости и математическая логика изложены настолько полно, чтобы объяснить результаты, которые в «*Elements of Mathematics*» я смог лишь упомянуть, однако знакомство с предыдущей книгой не является предварительным условием для чтения этой. Любой студент старших курсов, интересующийся основаниями, сможет получить из этой книги первоначальное представление об обратной математике. Разумеется, это относится и к профессиональным математикам, желающим освежить в памяти сведения об основаниях и узнать, как этот предмет трансформировался за последние годы.

Настало время для благодарностей. Я признателен Харви Фридману (Harvey Friedman) за информацию об истории обратной математики, Кейта Йокояме (Keita Yokoyama) за просвещение меня в области топологии и двум анонимным рецензентам за многочисленные полезные замечания и исправления. Как обычно, моя супруга Элейн безупречно справилась с корректурой, а Вики Керн (Vickie Kearn) и ее группа в издательстве Princeton University Press скрупулезно подошли к процессу производства книги.

Джон Стилуэлл
Сан-Франциско, 24 ноября 2016

ГЛАВА 1

Историческое введение

Цель этой вступительной главы – подготовить читателя к восприятию *обратной математики*. Как следует из названия, цель обратной математики – не вывод теорем, а поиск подходящих аксиом для доказательства уже известных теорем. Критерий «правильности» аксиомы был сформулирован в работе Friedman (1975) следующим образом:

> *Когда теорема доказана, исходя из правильных аксиом, аксиомы можно доказать, исходя из теоремы.*

Обратная математика возникла как технический раздел математической логики, но ее основные идеи имеют прецеденты в античной геометрии и теории множеств начала XX века.

В геометрии аксиома параллельных является правильной для доказательства многих теорем евклидовой геометрии, например теоремы Пифагора. Чтобы понять, почему, мы должны отделить аксиому параллельных от базовой теории, построенной на основе других аксиом Евклида, и показать, что аксиома параллельных не является теоремой базовой теории. Этого не удавалось сделать вплоть до 1868 года. Легче показать, что из базовой теории вытекает *эквивалентность* аксиомы параллельных многим другим теоремам, в частности теореме Пифагора. Это отличительный признак хорошей базовой теории: она не может доказать нечто непосредственно, но может доказать, что это «нечто» эквивалентно «правильным аксиомам».

Теория множеств дает более близкий нам пример: базовую теорию, именуемую ZF, теорему, не доказуемую в ZF (теорему Цермело о полной упорядоченности), и «правильную аксиому» для ее доказательства – аксиому выбора.

На основании этих и подобных примеров мы можем сделать предположение о базовой теории для анализа и «правильных аксиомах» для доказательства некоторых хорошо известных теорем в этой области.

1.1. Евклид и аксиома параллельных

Поиск «правильных аксиом» для математики начал примерно в 300 году до н. э. Евклид, предложивший аксиомы для того, что мы теперь называем *евклидовой геометрией*. Сейчас известно, что аксиомы Евклида неполны; тем не менее они очерчивают полную систему и разделяются на действительно очевидные «основные» аксиомы и одну менее очевидную, но принципиально важную для получения большинства интересных теорем. Исторический комментарий к этим аксиомам см. в работе Heath (1956).

Основные аксиомы говорят, например, что через любые две точки можно провести единственную прямую и что прямые линии не ограничены по длине. Основными являются также признаки *конгруэнтности треугольников*, пусть и нечетко сформулированные Евклидом, например по двум сторонам и углу между ними: если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то все стороны и углы треугольников соответственно равны. (Другой признак: по стороне и двум прилежащим к ней углам.)

С помощью основных аксиом можно доказать много теорем, не поражающих воображение. Например, *теорему о равнобедренном треугольнике*: если в треугольнике ABC сторона AB равна стороне AC, то противолежащие им углы C и B равны. Но с помощью одних лишь основных аксиом нельзя доказать знаковую теорему евклидовой геометрии – *теорему Пифагора*, показанную на рис. 1.1.

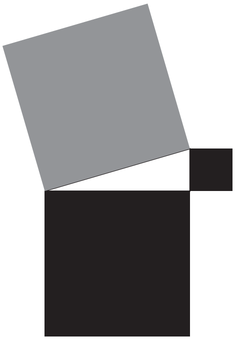

Рис. 1.1. Теорема Пифагора

Как всем известно, эта теорема утверждает, что площадь серого квадрата равна сумме площадей двух черных квадратов, но из основных аксиом нельзя вывести даже *существование* квадратов. Евклид понял, что для доказательства теоремы Пифагора необходима аксиома, касающаяся бесконечности: *аксиома параллельных* (прямых).

Аксиома параллельных

Я называю аксиому параллельных аксиомой, касающейся бесконечности, потому что в ней идет речь о прямых, которые не пересекаются, *как бы далеко их ни продолжать*. Таким образом, параллельность невозможно «увидеть», если только мы не обладаем способностью заглядывать в бесконечность, а Евклид предпочел не вводить предположение о наличии такой сверхчеловеческой способности. Вместо этого он предложил критерий непараллельности прямых, поскольку, чтобы «увидеть» пересечение прямых, достаточно конечного расстояния.

Аксиома параллельных. *Если прямая n, пересекающая прямые l и m (рис. 1.2), составляет с ними углы α и β в сумме меньше двух прямых углов, то l и m пересекаются с той стороны, где находятся углы α и β.*

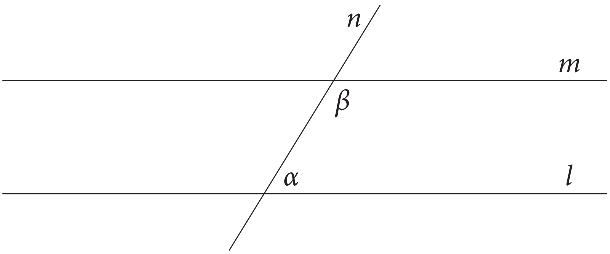

Рис. 1.2. Углы, участвующие в аксиоме параллельных

Отсюда следует, что если $\alpha + \beta$ равно двум прямым углам (т. е. развернутому углу), то l и m *не* пересекаются. Поскольку если бы они пересекались с одной стороны (и образовывали треугольник), то должны были бы пересекаться и с другой стороны и образовывать конгруэнтный треугольник, в силу признака равенства по стороне и двум прилежащим к ней углам, т. к. углы α и β с обеих сторон одинаковые, а сторона между ними общая (рис. 1.3). Это противоречит тому, что через любые две точки можно провести только одну прямую.

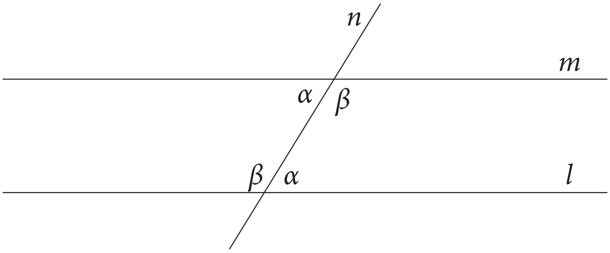

Рис. 1.3. Параллельные прямые

Таким образом, из аксиомы Евклида о *не*параллельных прямых вытекает существование параллельных прямых. Отсюда мы легко получаем теорему о том, что сумма углов треугольника равна развернутому углу (или π, как мы будем писать, начиная с этого момента) – в силу построения, показанного на рис. 1.4. А отсюда, в свою очередь, следует, что в равнобедренном треугольнике с углом $\pi/2$ между равными сторонами два других угла равны $\pi/4$, поэтому если составить два таких треугольника вместе, то получится квадрат.

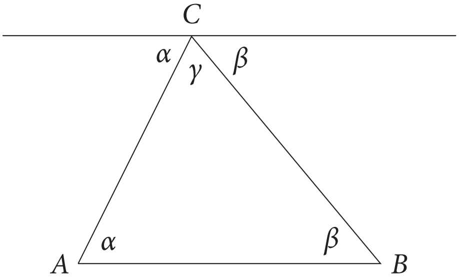

Рис. 1.4. Сумма углов треугольника

Теперь можно приступать к доказательству теоремы Пифагора, и провести его можно многими способами. Один из самых наглядных показан на рис. 1.5, где серый квадрат и два черных квадрата занимают часть большого квадрата за вычетом четырех одинаковых прямоугольных треугольников.

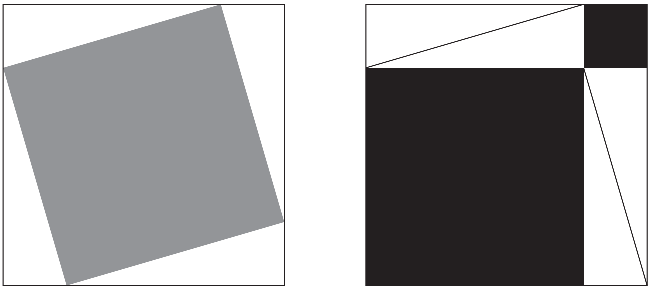

Рис. 1.5. Наглядное доказательство теоремы Пифагора

Эквиваленты аксиомы параллельных

Многие математики считали аксиому параллельных «пятном» системы Евклида – именно так назвал ее Саккери в работе Saccheri (1733) – и пытались доказать, что она вытекает из остальных аксиом. Обычно их попытки оборачивались выводом аксиомы параллельных из кажущегося очевидным утверждения в надежде свести задачу к более простой. Вот некоторые утверждения, из которых следует аксиома параллельных:

- существование прямоугольников (аль-Хайсам, ад-Дин Туси в Средние века);
- существование подобных треугольников разного размера (Валлис в 1693 году);
- сумма углов треугольника = π (в «Элементах геометрии» Лежандра, 1823 год);
- через любые три неколлинеарные точки можно провести окружность (Фаркаш Бойяи, 1832 год).

Все эти теоремы вытекают из аксиомы параллельных, поэтому эквивалентны ей по *силе* в том смысле, что их эквивалентность аксиоме параллельных можно доказать, опираясь только на остальные аксиомы. Разумеется, это понятие эквивалентной силы тривиально, если сама аксиома параллельных выводима из других аксиом, но к 1830 году надежды на это стали угасать. Сын Фаркаша Бойяи, Янош, был одним из основных исследователей гипотетической неевклидовой геометрии, в которой аксиома параллельных (а значит, и все четыре приведенные выше теоремы) *не имеет места*, хотя остальные аксиомы Евклида верны.

Но прежде чем переходить к неевклидовой геометрии, имеет смысл познакомиться с геометрией на сфере. Очевидно, что сферическая геометрия сильно отличается от евклидовой геометрии на плоскости – отсутствием не только параллельных линий, но и бесконечных линий. И тем не менее они разделяют общие понятия: «точка», «прямая», «угол». Знакомство с двумя разными интерпретациями этих слов облегчит восприятие еще одной интерпретации, или *модели* – модели неевклидовой геометрии.

1.2. Сферическая и неевклидова геометрия

Как окружности и прямые на плоскости являются составными частями двумерной евклидовой геометрии, так сферы и плоскости – части *трех*мерной евклидовой геометрии. На самом деле они даже упоминаются, хотя и не подвергаются глубокому исследованию, в книге XI «Начал» Евклида. Древние греки всерьез изучали сферическую геометрию, а особенно сферическую тригонометрию, в рамках астрономии, поскольку с Земли кажется, что звезды расположены на поверхности небесной сферы. Позже интерес к сферической геометрии подпитывался задачами навигации. Для навигаторов естественным аналогом «прямой» является большая окружность – пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр, – поскольку именно по большой окружности проходит кратчайший путь между двумя точками на сфере. Понятие «угла» между такими «прямыми» также имеет смысл и определяется как угол между соответствующими плоскостями (или, что то же самое, угол между касательными к большим окружностям).

Действительно, часто сферический треугольник проще описать величинами углов, а не длинами сторон. Все сферические треугольники с одинаковыми углами имеют в точности одинаковые размеры – в силу знаменитой теоремы Хэрриота[1], доказанной в 1603 году: *сумма углов сферического треугольника минус π пропорциональна его площади*. Существует несколько способов замостить поверхность сферы конгруэнтными треугольниками. На рис. 1.6 показан один такой способ, когда сфера разбита на 48 треугольников с углами $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$. Чередующиеся треугольники приподняты над поверхностью сферы, чтобы их легче было различить, и сфера подсвечена изнутри. Это и есть стандартная модель сферической геометрии: «точками» являются обычные точки на сфере, «прямыми» – большие окружности, «углами» – углы между касательными к большим окружностям в точке их пересечения. «Расстоянием», если мы захотим использовать это понятие, будет расстояние между точками на сфере, измеренное по более короткой дуге соединяющей их большой окружности.

Рис. 1.6. Замощение сферы треугольниками

Теперь обратимся к другой модели, *спроецировав сферу на плоскость*. Точнее, поместим источник света внутри сферы (в ее северном полюсе), так чтобы он отбрасывал тень на плоскость. Результат показан на рис. 1.7, где

[1] Томас Хэрриот был советником сэра Уолтера Рэйли по математике и принимал участие в некоторых его путешествиях.

хорошо видно два замечательных свойства проекции из северного полюса, которая называется *стереографической* проекцией:

- окружности отображаются в окружности (или в исключительных случаях в прямые, которые можно назвать «окружностями бесконечного радиуса»);
- углы сохраняются.

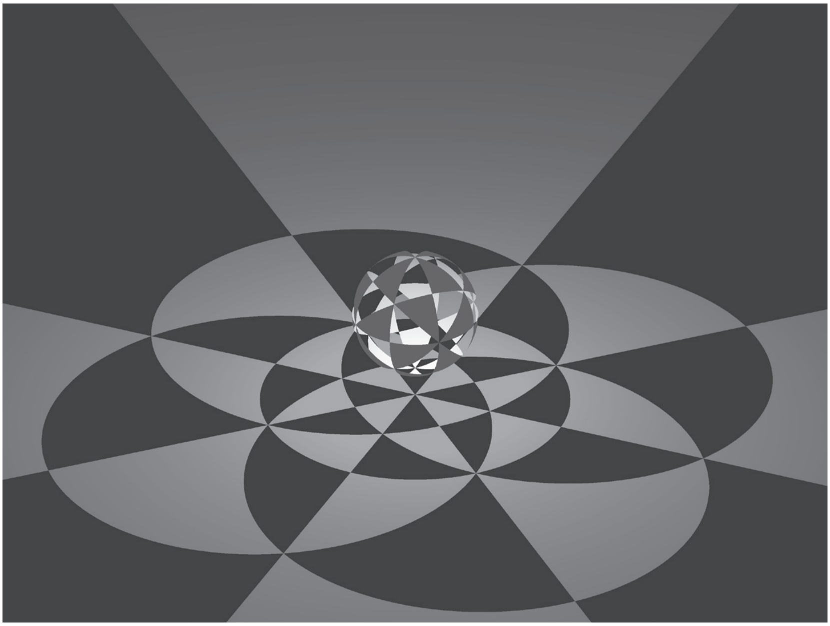

Рис. 1.7. Проекция сферы на плоскость

Таким образом, «точки» по-прежнему являются точками, «прямые» – окружностями, а «угол» – углом между касательными к окружности. Увы, «расстояние» не переходит в евклидово расстояние, потому что равные отрезки на сфере могут отображаться в отрезки разной длины на плоскости. Аналогично «площадь» не является евклидовой площадью, но мы легко можем измерить ее суммой углов минус π.

Строго говоря, мы спроецировали на плоскость не всю сферу, а сферу с выколотой точкой – северным полюсом, в котором расположен источник света. Чтобы исправить ситуацию, мы можем пополнить плоскость *бесконечно удаленной точкой* – той, в которой стремятся тени точек на сфере по мере их приближения к северному полюсу. Бесконечно удаленная точка дополняет каждую прямую до замкнутой кривой, так что все они становятся окружностями. Таким образом, в нашей второй интерпретации сферической геометрии «прямые» моделируются окружностями, а «углы» – углами между окружностями. В следующем подразделе мы увидим похожую модель неевклидовой геометрии.

Модели неевклидовой геометрии

Бельтрами (1868) открыл несколько моделей неевклидовой геометрии, в которых справедливы основные аксиомы Евклида плюс неевклидова аксиома параллельных, утверждающая, что *для любой прямой l и не принадлежащей ей точки P существует более одной прямой m, которая не пересекается с l*. Простейшая из моделей Бельтрами показана на рис. 1.8.

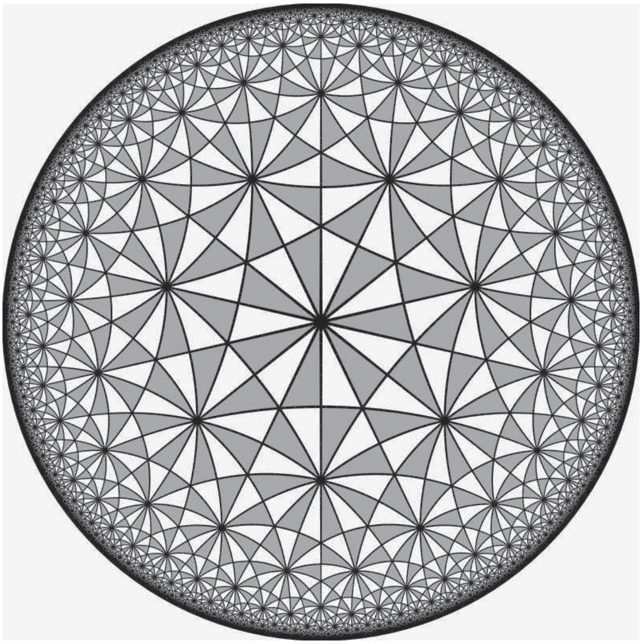

Рис. 1.8. Конформная модель на диске

В этой модели «точками» являются внутренние точки диска, «прямыми» – дуги окружностей, перпендикулярные граничной окружности диска (включая и отрезки прямых, проходящих через центр диска, которые рассматриваются как окружности бесконечного радиуса), а «углами» – углы между окружностями. Как и в сферической геометрии, треугольники конгруэнтны, если имеют одинаковые углы, так что на этом рисунке диск заполнен бесконечным множеством конгруэнтных треугольников, каждый из которых имеет углы $\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/7$. Это самые мелкие из треугольников, которыми можно замостить неевклидову плоскость, и, как и в сферической геометрии, их площадь определяется суммой углов: *величина π минус сумма углов неевклидова треугольника пропорциональна его площади*.

Как и в случае плоской модели сферической геометрии, точно определить «расстояние» сложно. Но тут оно лучше ощущается, потому что имеется много треугольников одинакового неевклидова размера. Например, видно, что вдоль каждой «прямой» расположено бесконечно много треугольников, поэтому «длина» каждой «прямой» бесконечна. Можно даже принять, что каждая «прямая» дает наименьшее расстояние между любыми двумя точками диска, поскольку количество треугольников вдоль дуги окружности, перпендикулярной границе, меньше, чем вдоль любого другого маршрута. Таким образом, понятно, почему эта модель удовлетворяет основным аксиомам Евклида. Но аксиоме параллельных она, очевидно, *не* удовлетворяет. Если взять вертикальную «прямую» l, проходящую через центр диска, и точку P, расположенную, скажем, справа от нее, то существуют различные «прямые» m и n, проходящие через точку P и не пересекающие l, как видно по рис. 1.9.

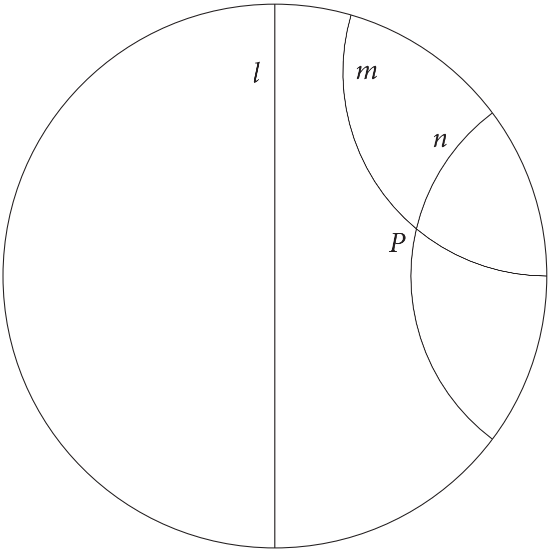

Рис. 1.9. Аксиома параллельных не удовлетворяется

Итак, проверив детали построения Бельтрами, мы получаем модель, *в которой основные аксиомы Евклида выполняются, а аксиома параллельных – нет*. Поэтому *аксиома параллельных не вытекает из остальных аксиом Евклида*, и, значит, то же можно сказать про эквивалентные ей теоремы (в частности, упомянутые в предыдущем разделе). Однако эквивалентность аксиомы параллельных и этих теорем выводима из других аксиом Евклида. Такая ситуация типична для обратной математики: имеется *базовая теория*, слишком слабая для доказательства определенных теорем, но достаточно сильная для доказательства их *эквивалентности*.

Новые основания геометрии и математики

Открытие неевклидовой геометрии стало потрясением для оснований математики, которая до XIX века неявно покоилась на евклидовых понятиях «прямой» и «плоскости». Посеяв сомнения в смысле слов «прямая» и «плоскость», неевклидова геометрия подсказала искать новые основания в *арифметике*, поскольку фундаментальные свойства чисел под сомнения не ставились.

В частности, «прямая» была переосмыслена как система $\mathbb{R}$ вещественных чисел, обладающая алгебраическими и геометрическими свойствами. В следующих нескольких разделах описывается возникновение геометрии, основанной на понятии вещественного числа либо испытавшей сильное влияние этого понятия. В главе 2 мы увидим, что вещественные числа легли также в основание анализа.

1.3. Векторная геометрия

Первый крупный шаг вперед в геометрии со времен греков был сделан Ферма и Декартом в 1620-х годах и опубликован в «Геометрии» Декарта (1637). Новшество заключалось в использовании алгебры для описания прямых и кривых уравнениями, что свело многие геометрические задачи к рутинным вычислениям. Но прежде чем они смогли «алгебраизировать» геометрию, ее нужно было *арифметизировать* – и уже этот шаг далеко продвинул их по сравнению с Евклидом. На самом деле это был первый шаг в направлении широкой арифметизации геометрии элементарных формальных систем и анализа, произошедшей в XIX веке.

Как теперь известно каждому студенту, арифметизация евклидовой плоскости была достигнута путем сопоставления вещественных *координат* x и y каждой точке P на плоскости. Числа x и y визуализируются как расстояния от P до начала координат O по горизонтали и по вертикали, так что расстояние $|OP|$ между P и O, по теореме Пифагора, равно $\sqrt{x^2 + y^2}$ (рис. 1.10). Но P можно *определить* как упорядоченную пару[2] $\langle x, y\rangle$, а расстояние от нее до O определить как $\sqrt{x^2 + y^2}$. Вообще, расстояние между точками $P_1 = \langle x_1, y_1\rangle$ и $P_2 = \langle x_2, y_2\rangle$ определяется как

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Точки $\langle x, y\rangle$ лежат на *прямой линии*, если они удовлетворяют уравнению вида $ax + by + c = 0$ (потому-то такое уравнение и называется *линейным*), а уравнение окружности квадратичное и выражает условие постоянства рас-

---

[2] В этой книге я использую нотацию $\langle a, b\rangle$ для обозначения упорядоченной пары чисел a и b, поскольку (a, b) означает открытый интервал между a и b.

стояния до некоторой точки. Например, точки, отстоящие от начала координат O на расстояние 1, удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 1$.

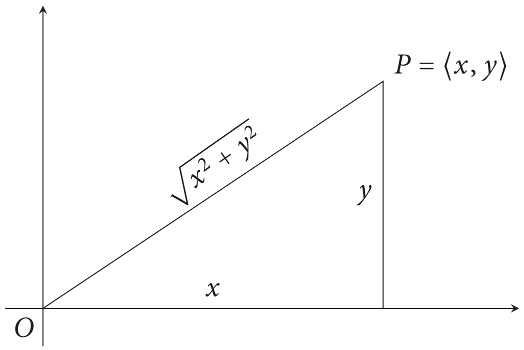

Рис. 1.10. Система координат на плоскости

Таким образом, мы получаем возможность перевести на язык алгебры всю евклидову геометрию – *и не только*, поскольку, если не считать алгебраических трудностей, ничто не препятствует изучению кривых, удовлетворяющих произвольным полиномиальным уравнениям. Следовательно, евклидова геометрия и алгебраическая геометрия – не совсем синонимы. Евклидова геометрия «более линейна».

Линейная геометрия Грассмана

Точное алгебраическое соответствие евклидовой геометрии было в 1840-х годах найдено Грассманом, который ввел понятие *вещественного векторного пространства*. Его первые работы на эту тему, Grassmann (1844) и Grassmann (1847), оказались недоступны другим математикам, а его идеи стали получать распространение только после того, как Пеано в работе Peano (1888) предложил аксиомы вещественного векторного пространства.

Определение. *Вещественным векторным пространством называется множество V объектов, называемых векторами (обозначаются полужирным шрифтом), которое включает нулевой вектор* $\mathbf{0}$ *и для каждого* $\boldsymbol{u} \in V$ *также вектор* $-\boldsymbol{u}$*, называемый противоположным* $\boldsymbol{u}$*. V наделено операциями сложения и умножения на скаляр ($a, b, c, \ldots \in \mathbb{R}$), которые удовлетворяют следующим условиям:*

$$\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u};$$
$$\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w};$$
$$\boldsymbol{u} + \mathbf{0} = \boldsymbol{u};$$
$$\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \mathbf{0};$$

$$1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u};$$
$$a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v};$$
$$(a + b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u};$$
$$a(b\boldsymbol{u}) = (ab)\boldsymbol{u}.$$

Обычно $V = \mathbb{R}^n = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : x_1, \ldots, x_n\rangle$, при этом $\mathbf{0}$ – начало координат, операция + – обычная сумма кортежей длины n, а умножение на скаляр $a \in \mathbb{R}$ определяется как

$$a\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle ax_1, \ldots, ax_n\rangle.$$

Это векторное пространство называется *вещественным n-мерным аффинным пространством*. Оно еще не является евклидовым, потому что не определены понятия расстояния и угла, но уже обладает значительным геометрическим наполнением. В $\mathbb{R}^n$ имеются прямые, в т. ч. параллельные, а также понятие «длины в данном направлении». Например, можно сказать, что $\frac{1}{2}\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}$ – *средняя точка* отрезка от $\mathbf{0}$ до $\boldsymbol{v}$, а в общем случае $a\boldsymbol{v}$ отстоит от $\mathbf{0}$ в a раз дальше, чем $\boldsymbol{v}$. В векторной геометрии имеет смысл также понятие *центра масс*. В частности, центром масс треугольника с вершинами $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ является точка $\frac{1}{3}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$.

Чтобы дополнить векторную геометрию до евклидовой, необходимо ввести понятие *скалярного произведения* векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, которое обозначается $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$:

Определение. *Если* $\boldsymbol{u} = \langle u_1, \ldots, u_n\rangle$ *и* $\boldsymbol{v} = \langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ *то*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + \ldots + u_nv_n.$$

В частности, в R^2 *имеем*

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} = u_1^2 + u_2^2,$$

поэтому евклидова длина $|\boldsymbol{u}|$ *вектора* $\boldsymbol{u}$ *равна* $|\boldsymbol{u}| = \sqrt{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}}$. *Грассман в работе Grassmann (1847) заметил, что при таком определении скалярного произведения теорема Пифагора верна чуть ли не по определению.*

Понятие евклидова угла также вытекает из скалярного произведения, поскольку

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\,|\boldsymbol{v}| \cos \theta,$$

где θ – угол между прямыми, соединяющими $\mathbf{0}$ соответственно с $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$. Таким образом, в работе Grassmann (1847) найден еще один способ описать евклидову геометрию как «базовую теорию» плюс «правильная аксиома», позволяющая вывести теорему Пифагора. Интересно, что эта базовая теория (аксиомы векторного пространства) допускает расширение другой аксиомой, в результате чего получается неевклидова геометрия.

Превращение векторного пространства в неевклидово

Ключевое свойство скалярного произведения Грассмана – его *положительная определенность*, т. е. тот факт, что $|\boldsymbol{u}|^2 = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u} > 0$, если $\boldsymbol{u} \neq \mathbf{0}$, в результате чего длина любого ненулевого вектора положительна. Специальная теория относительности Эйнштейна побудила Минковского (Minkowski, 1908) определить *не* положительно определенное скалярное произведение в пространстве $\mathbb{R}^4$ векторов пространства-времени $\langle t, x, y, z\rangle$, а именно

$$\langle t_1, x_1, y_1, z_1\rangle \cdot \langle t_2, x_2, y_2, z_2\rangle = -t_1t_2 + x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

При таком определении скалярного произведения вектор $\boldsymbol{u} = \langle t, x, y, z\rangle$ имеет «длину» $|\boldsymbol{u}|$

$$|\boldsymbol{u}|^2 = -t^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$

и понятно, что для многих векторов она равна нулю или отрицательна. Чтобы упростить визуализацию, рассмотрим соответствующую концепцию длины в пространстве $\mathbb{R}^3$ векторов $\boldsymbol{u} = \langle t, x, y\rangle$, а именно

$$|\boldsymbol{u}|^2 = = -t^2 + x^2 + y^2.$$

Это означает, что в $\mathbb{R}^3$ имеется «сфера[3] радиуса $\sqrt{-1}$ с центром в O», состоящая из векторов $\boldsymbol{u} = \langle t, x, y\rangle$ таких, что

$$-t^2 + x^2 + y^2 = -1.$$

Эта поверхность в $\mathbb{R}^3$ – не что иное, как *гиперболоид* $x^2 + y^2 - t^2 = 1$.

Оказывается, что расстояние Минковского на поверхности гиперболоида дает неевклидову геометрию – такую же, как модель Бельтрами, описанная в предыдущем разделе. На рис. 1.11, основанном на рисунке Конрада Полтхира (Konrad Polthier) из Свободного университета Берлина, показана связь между той и другой моделями. Замощение диска проецируется на замощение гиперболоида треугольниками, конгруэнтными в смысле расстояния Минковского.

[3] В удивительном пророчестве (Lambert, 1766) Ламберт предположил, что, возможно, существует геометрия на сфере мнимого радиуса, для которой сумма углов треугольника меньше π, а площадь треугольника пропорциональна π минус сумма углов. Именно так и происходит в неевклидовой геометрии Бельтрами.

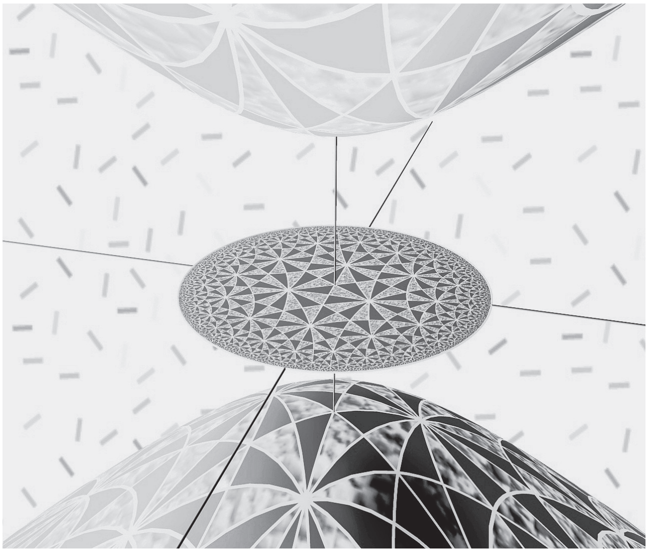

Рис. 1.11. Модель неевклидовой геометрии на гиперболоиде

1.4. Аксиомы Гильберта

«Начала» Евклида – первое организованное изложение математики, дошедшее до нас со времен античности. Оно известно прежде всего изложением геометрии, и принятый в нем способ вывода теорем из аксиом оставался в математике стандартом вплоть до XIX века. А затем открытие неевклидовой геометрии заставило рассмотреть евклидову геометрию под микроскопом, и в конце XIX века в его аксиомах обнаружились некоторые пробелы. Но это лишь ускорило движение в сторону аксиоматизации. Пробелы Евклида были восполнены Гильбертом (Hilbert, 1899), и одновременно Дедекинд, Пеано и другие занялись аксиоматизацией теории чисел и алгебры.

Евклид также включил в «Начала» дедуктивное построение теории чисел, но оно было осложнено открытием греками иррациональности, которое, как они полагали, исключало некоторые геометрические величины (например, диагональ единичного квадрата, равную $\sqrt{2}$) из состава чисел. Иррациональные числа не удавалось в полной мере примирить с целыми и рациональными до выхода Дедекинд-книги Dedekind (1872), посвященной иррациональным числам. Дедекинд обнаружил, что Евклид был на верном пути – единственная новая идея, понадобившаяся для того, чтобы сделать его теорию иррациональных величин частью его же теории чисел, заключалась в том, чтобы ввести в рассмотрение *бесконечные множества* рациональных чисел (см. раздел 1.5).

Оба основных направления «Начал», геометрия и вещественные числа, были объединены в книге Гильберта «Основания геометрии» (Hilbert, 1899). В ней Гильберт не только восполнил пробелы в евклидовых аксиомах геометрии, но и ввел две аксиомы, довершающие геометрический путь к системе вещественных чисел $\mathbb{R}$. Это было историческое достижение, хотя путь Гильберта нельзя назвать лучшим для всех математических целей. Путь к *арифметизации* вещественных чисел через рациональные в итоге оказался наиболее полезным для анализа, и мы снова воспользуемся им в главе 2.

Гильберт (Hilbert, 1899) обнаружил, что евклидова геометрия и арифметика вещественных чисел вытекают из 17 описанных ниже аксиом. Все они, кроме двух, чисто геометрические. Исключениями являются *аксиома Архимеда*, согласно которой никакой отрезок прямой не может быть «в бесконечное число раз больше» другого отрезка, и *аксиома полноты*, которая говорит, что множество точек на прямой не содержит «лакун». (Эти две аксиомы были не нужны Евклиду, который рассматривал только точки, которые можно построить циркулем и линейкой.) Их цель – доказать, что любая прямая, удовлетворяющая этим аксиомам, по существу совпадает с множеством $\mathbb{R}$ вещественных чисел. Отсюда следует, что любая плоскость, удовлетворяющая этим аксиомам, является декартовой плоскостью, поэтому у евклидовой геометрии действительно только одна модель – плоскость, состоящая из пар вещественных чисел.

Это весьма радующее схождение геометрической и арифметической точек зрения проистекает из того, что геометрические аксиомы Гильберта дают не только геометрические теоремы Евклида, но и *алгебру*, появления которой Евклид не предвидел. На самом деле алгебраическая структура возникает постепенно в соответствии с *группами* аксиом, которые Гильберт вводит одну за другой.

Аксиомы принадлежности. Эти аксиомы связывают точки и прямые. В эту группу входит аксиома Евклида, согласно которой прямая определяется двумя точками, и вариант аксиомы параллельных: для любой прямой l и точки $P \notin l$ существует ровно одна прямая m, проходящая через P и не пересекающаяся с l. Кроме того (Евклид считал это само собой разумеющимся), каждой прямой принадлежат по меньшей мере две точки, и существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

Аксиомы порядка. Первые три аксиомы этой группы утверждают очевидные вещи о порядке трех точек на прямой: если B лежит между A и C, то она также лежит между C и A; для любых A и C существует точка B, лежащая между ними; среди любых трех точек одна и только одна лежит между двумя другими. Четвертая аксиома, называемая *аксиомой Паша*, относится к плоскости: прямая, пересекающая одну сторону треугольника во внутренней точке, пересекает ровно одну из двух других сторон[4].

Аксиомы конгруэнтности. Первые пять аксиом этой группы касаются равенства отрезков и углов, а также сложения отрезков. Они утверждают существование и единственность отрезков прямой или углов, равных данным и начинающихся в данной точке. Они также говорят, что (по выражению Евклида) «вещи, равные одной и той же вещи, равны между собой». Последняя аксиома конгруэнтности – это признак равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними.

Аксиома пересечения окружностей. Две окружности пересекаются, если одна из них содержит точки, лежащие как внутри, так и снаружи другой. (Евклид упустил эту аксиому, хотя предполагал ее в самом первом предложении, когда строил равносторонний треугольник.) Заметим, что точки «внутри» окружности радиуса r – это точки, отстоящие от ее центра на расстояние меньше r.

Аксиома Архимеда. Для любых двух отрезков AB и CD ненулевой длины существует натуральное число n такое, что n копий AB, приставленных друг к другу, больше CD.

Аксиома полноты. Пусть точки прямой l разбиты на два непустых подмножества $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ таким образом, что никакая точка $\mathcal{A}$ не лежит между двумя точками $\mathcal{B}$ и никакая точка $\mathcal{B}$ не лежит между двумя точками $\mathcal{A}$. Тогда существует единственная точка P, принадлежащая либо $\mathcal{A}$, либо $\mathcal{B}$, которая лежит между любыми двумя другими точками, из которых одна принадлежит $\mathcal{A}$, а другая $\mathcal{B}$. (То есть между $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ нет «лакуны».)

Эти аксиомы придают точный смысл идее о том, что некоторая теорема *эквивалентна* аксиоме параллельных: именно, эквивалентность должна быть доказуема в *базовой теории*, состоящей из аксиом Гильберта *за вычетом* аксиомы параллельных. Все теоремы, которые ранее считались эквивалентными аксиоме параллельных (например, упомянутые в разделе 1.1), эквивалентны ей в этом смысле. Как отмечалось в конце раздела 1.2, доказательство эквивалентности в более слабой системе – отличительный признак *обратной математики*. Далее в этой главе мы встретим и другие исторические примеры. В наши дни эта идея наиболее полно разработана в

[4] Формулировка неточна. Необходимо добавить, что прямая не проходит ни через одну из трех точек. – *Прим. перев.*

системах анализа, и некоторые из основных вытекающих из нее результатов мы увидим в главах 6 и 7.

Алгебраическое содержание аксиом Гильберта

Аксиомы принадлежности позволяют определить сумму и произведение точек на прямой с помощью построений, показанных на рис. 1.12 и 1.13.

Для построения суммы мы выбираем точку 0 на прямой, а затем для любых точек a и b на этой прямой строим точку $a + b$, проводя параллельные прямые, как показано на рисунке. По существу, параллельные прямые позволяют «перенести» точку b вдоль прямой на расстояние, равное расстоянию между 0 и a.

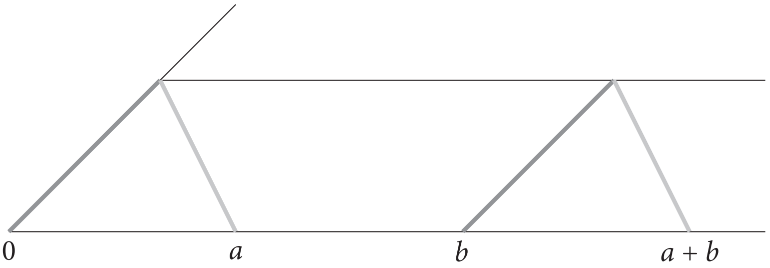

Рис. 1.12. Сложение точек на прямой

Для построения произведения нам понадобится еще точка 1 на прямой («единица длины»), а различные параллельные прямые позволят «увеличить» расстояние от 0 до b в количество раз, равное расстоянию от 0 до a, так что в итоге получится точка ab.

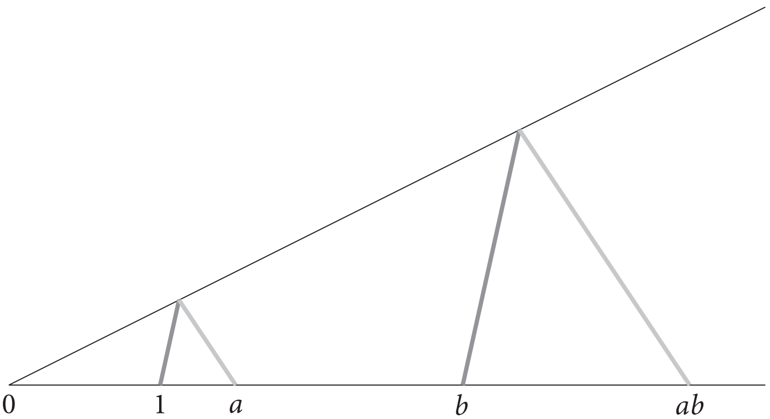

Рис. 1.13. Умножение точек на прямой

С помощью аксиом конгруэнтности можно доказать, что определенные таким образом операции суммы и произведения обладают следующими алгебраическими *свойствами поля* (используются также *аксиомы*, определяющие поле):

$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$	(коммутативность);
$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$	(ассоциативность);
$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	(нейтральный элемент);
$a + (-a) = 0$	$a \cdot a^{-1} = 1$ для $a \neq 0$	(обратный элемент);
$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$		(дистрибутивность).

Свойства поля проще всего вывести из аксиом конгруэнтности, но на самом деле существует чистая аксиома принадлежности – так называемая *теорема Паппа*, – из которой все свойства поля следуют с помощью других аксиом принадлежности[5]. Таким образом, алгебраическая структура поля вытекает из аксиом, которые Евклид почти полностью упустил из виду: аксиом принадлежности, описывающих взаимодействие точек и прямых.

Аксиомы порядка вводят отношение порядка $\leq$ между точками на прямой, обладающее следующими свойствами для любых трех точек a, b, c:

- $a \leq a$;
- если $a \neq b$, то либо $a < b$, либо $b < a$, но не то и другое одновременно;
- если $a \leq b$ и $b \leq c$, то $a \leq c$.

Отношение порядка в сочетании со свойствами поля порождает *упорядоченное поле*. Помимо описанных выше свойств поля, оно характеризуется следующими свойствами:

- если $a \leq b$, то $a + c \leq b + c$;
- если $0 \leq a$ и $0 \leq b$, то $0 \leq ab$.

Наконец, аксиомы Архимеда и полноты говорят, что это отношение порядка *архимедово* и *полное* в смысле, описываемом этими аксиомами. Можно доказать, что *полное архимедово упорядоченное поле изоморфно полю вещественных чисел* $\mathbb{R}$. Если имеется такое поле $\mathbb{F}$, то идея доказательства заключается в том, чтобы построить копию $\mathbb{R}$ внутри $\mathbb{F}$, выполнив следую-

[5] Кстати говоря, свойства поля можно доказать и в постановке проективной геометрии, в которой имеются только аксиомы принадлежности, а аксиома параллельных заменяется аксиомой, согласно которой любые две прямые пересекаются в единственной точке. Описанные выше построения можно выполнить в такой постановке, если назвать одну прямую «бесконечно удаленной» и считать прямые «параллельными», если они пересекаются на бесконечно удаленной прямой.

щие шаги. (Читатели, незнакомые с построением вещественных чисел в виде дедекиндовых сечений, могут принять эти шаги на веру и подтвердить их впоследствии при чтении главы 2.)

1. По элементу $1 \in \mathbb{F}$ построить «положительные целые числа» $\mathbb{F}$, а именно
$$1,\ 1+1,\ 1+1+1,\ 1+1+1+1,\ \ldots,$$
применяя операцию $+$, определенную на $\mathbb{F}$.
2. Построить «целые числа» $\mathbb{F}$, пользуясь элементом 0 и операцией $-$.
3. Построить «рациональные числа» $\mathbb{F}$, пользуясь операциями обращения и произведения.
4. Воспользоваться свойствами упорядоченности и полноты $\mathbb{F}$ для построения «вещественных чисел» $\mathbb{F}$ в виде дедекиндовых сечений «рациональных чисел» $\mathbb{F}$.
5. Проверить, что «вещественными числами» $\mathbb{F}$ исчерпываются все элементы $\mathbb{F}$ и что они обладают такими же свойствами, как настоящие вещественные числа.

Это доказательство показывает, что любое полное архимедово упорядоченное поле по существу «совпадает» с $\mathbb{R}$, так что любая прямая в геометрии Гильберта неотличима от вещественной прямой. Следующий вопрос: насколько хорошо мы понимаем $\mathbb{R}$?

1.5. Полная упорядоченность и аксиома выбора

В книге V «Начал» Евклид очень подробно описал геометрическую прямую и ее связь с рациональными числами. Он не решился объявить иррациональные точки числами, но по существу показал, что любую точку можно сколь угодно точно аппроксимировать рациональными числами. Это означает, что любая точка *определяется* рациональными числами (например, теми, что находятся слева от нее), поэтому, чтобы рассматривать точки как арифметические объекты, *нужно только принять бесконечные множества в качестве математических объектов*.

Однако до середины XIX века большинство математиков отвергали идею бесконечных множеств в качестве математических объектов. Они находились под влиянием древнегреческого разделения на «потенциальную» и «актуальную» бесконечность. Например, разрешалось рассматривать натуральные числа как не имеющий конца процесс – начать с 0 и прибавлять каждый раз 1 – но завершенная, или «актуальная», сущность $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ не допускалась. Сегодня это разделение кажется казуистикой, потому что –

насколько было известно любому в середине XIX столетия – все бесконечные множества можно рассматривать как «потенциальные» бесконечности.

Например, множество целых чисел $\mathbb{Z}$ можно рассматривать как потенциальную бесконечность, перечислив их в следующем порядке:

$$0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots .$$

Аналогично положительные рациональные числа можно рассматривать как потенциальную бесконечность, перечислив их в порядке

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{1}{2}, \frac{3}{1}, \frac{1}{3}, \frac{4}{1}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$$

(правило заключается в том, чтобы перечислять дроби m/n в порядке возрастания суммы $m + n$: сначала те, для которых $m + n = 2$, затем те, для которых $m + n = 3$, и т. д.). А множество всех рациональных чисел $\mathbb{Q}$ можно представить в виде потенциальной бесконечности, чередуя положительные и отрицательные элементы, как мы делали для $\mathbb{Z}$:

$$0, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{1}, -\frac{3}{1}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \ldots .$$

Таким образом, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$, которые мы теперь рассматриваем как множества, можно было бы хитрыми уловками представить в виде «потенциальных» бесконечностей, если математик щепетильно относился к различию между потенциальным и актуальным.

Гораздо более серьезная проблема возникла в 1874 году, когда Кантор показал, что $\mathbb{R}$ ни в каком смысле не является потенциальной бесконечностью.

Несчетность

Чтобы показать, что множества $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ являются потенциальными бесконечностями, мы пересчитали их элементы, т. е. расположили их в виде последовательности:

1-й член, 2-й член, 3-й член, … .

При этом процесс подсчета был организован так, что любой элемент достигался после конечного числа шагов. Кантор (Cantor, 1874) показал, что $\mathbb{R}$ несчетно, т. е. *такого упорядочения* $\mathbb{R}$ *не существует*.

Он показал, что никакая последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ вещественных чисел не может включать все вещественные числа. Действительно, если имеются десятичные представления чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots$, то можно *вычислить* десятичное представление такого числа x, которое отсутствует в этой последовательности. Например, мы можем действовать согласно такому правилу:

$$n\text{-я десятичная цифра } x = \begin{cases} 1, & \text{если } n\text{-я десятичная цифра } x_n \neq 1 \\ 2, & \text{если } n\text{-я десятичная цифра } x_n = 1 \end{cases}.$$

Тогда x отлично от любого x_n, потому что они различаются в n-м десятичном знаке. Таким образом, принимая $\mathbb{R}$, мы должны принять, что это *актуальная* бесконечность. Приведенное выше доказательство Кантор дал в работе Cantor (1891). Кстати, это прототип многих доказательств, касающихся $\mathbb{R}$, которые встретятся нам в этой книге. Имея произвольный объект, например последовательность или функцию, мы доказываем существование какого-то другого объекта, *вычисляя его по* данному. Вычисление одного объекта по другим редко вызывает интерес в классическом анализе – на самом деле многие математики считали доказательство Кантора *неконструктивным*, – но эта идея важна, как мы увидим в последующих главах.

Полная упорядоченность

Теорема Кантора показывает, что $\mathbb{R}$ невозможно упорядочить так просто, как $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{Q}$: 1-й член, 2-й член, 3-й член, ... Тем не менее в работе Cantor (1883) Кантор выразил уверенность в существовании более общего вида упорядоченности:

> В следующей статье я обсужу закон, согласно которому любое *корректно определенное* множество всегда можно представить в *виде вполне упорядоченного* множества, – этот закон кажется мне фундаментальным, крайне важным и весьма удивительным (Ewald (1996), vol. II, p. 886).

Кантор называл множество S вполне упорядоченным, если на нем определен такой порядок, что в каждом непустом подмножестве $T \subseteq S$ имеется *наименьший* элемент. Это очевидно в случае $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$, поскольку каждый элемент помечен положительным целым числом (просто возьмем элемент T, которому соответствует наименьшее целое число). Это справедливо также для следующего упорядочения $\mathbb{Z}$:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, -4, \ldots,$$

при котором 0 и положительные целые числа предшествуют всем отрицательным целым числам. Если T – непустое подмножество $\mathbb{Z}$, то наименьшим элементом T при таком упорядочении будет

> *наименьшее неотрицательное целое в T, если T содержит неотрицательные числа,*
>
> *или*
>
> *наибольшее отрицательное целое в T, если T содержит только отрицательные числа.*

Но когда речь заходит о $\mathbb{R}$, то никакая изобретательность не поможет найти полный порядок на множестве вещественных чисел. Обычный порядок $<$ не годится, потому что в таких подмножествах, как $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$, нет наименьшего элемента. Таким образом, предположение Кантора о существовании полного порядка для всех «корректно определенных» множеств – а $\mathbb{R}$ таковым, безусловно, является – было очень смелым.

Теорема о полном упорядочении и аксиомы Цермело

Быть может, Кантор думал, что его «фундаментальный закон» должен быть аксиомой теории множеств. Но он не предложил систему аксиом для теории множеств, поэтому осталось неясным, должно ли утверждение о существовании полного порядка быть аксиомой или теоремой. Картина прояснилась, когда Цермело (Zermelo, 1904) вывел это утверждение из интуитивно кажущегося более простым предположения, которое сегодня называется *аксиомой выбора*.

> **Аксиома выбора (АВ).** *Для любого множества X непустых подмножеств x существует функция выбора, т. е. функция f такая, что $f(x) \in x$ для любого $x \in X$.*

Чтобы обеспечить точные условия для своего доказательства (и в то же время снять некоторые сомнения по части оснований теории множеств), Цермело (Zermelo, 1908) сформулировал первый набор аксиом для теории множеств. В рамках этой системы, которая теперь называется Z, стало возможно доказать, что АВ *эквивалентна* теореме о полном упорядочении. Френкель в работе Fraenkel (1922) усилил одну из аксиом Цермело, результат теперь называется теорией множеств Цермело–Френкеля (ZF).

Система аксиом теории множеств ZF оставалась стабильной начиная с 1922 года и стала общепринятой в качестве основания всей господствующей математики, по крайней мере в сочетании с АВ. Действительно, в ZF было доказано, что АВ эквивалентна многим очень нужным теоремам, в т. ч. теореме о полном упорядочении, которые, как казалось, были недоказуемы в ZF непосредственно.

Это поставило АВ в такое же положение относительно ZF, какое аксиома параллельных занимает по отношению к другим аксиомам Евклида (или, точнее, к другим аксиомам Гильберта). Теоремы, эквивалентность которых АВ в ZF была доказана, не представляли ярко выраженного интереса, пока не стало известно, что АВ *недоказуема* в ZF. Это было сделано Коэном (Cohen, 1963). Как Бельтрами в 1868 году поступил с аксиомой параллельных, так и Коэн продемонстрировал недоказуемость АВ, построив модель ZF, в которой АВ не имела места. Его построение, как и построение Бельтрами, стало прорывом, полностью изменившим облик предмета. К сожалению, оно носит слишком технический характер, чтобы приводить его в этой книге, но некоторые следствия мы описать можем.

Математический эквивалент аксиомы выбора

Как аксиома параллельных в геометрии, АВ в теории множеств занимает важное место «над» основными аксиомами (ZF). В рамках ZF нельзя доказать АВ, но ZF является хорошей базовой теорией, поскольку позволяет доказать эквивалентность АВ многим интересным утверждениям теории множеств и математики вообще. В этом смысле АВ – «правильная аксиома» для доказательства этих утверждений. Как мы знаем, одно из таких утверждений – теорема о полном упорядочении. Другое – следующее свойство *векторных пространств* над произвольным полем $\mathbb{F}$. (Мы определили *вещественное* векторное пространство в разделе 1.3. Определение векторного пространства над произвольным полем такое же, только $\mathbb{R}$ нужно заменить на $\mathbb{F}$.)

Существование базиса векторного пространства. *У любого векторного пространства имеется базис, т. е. подмножество U векторов $\boldsymbol{u}$ такое, что:*

(i) для любого $\boldsymbol{v} \in V$ существуют $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}$ такие, что $\boldsymbol{v} = f_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + f_k\boldsymbol{u}_k$ («V натянуто на U»);
(ii) для любых различных $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_k \in U$ и $f_1, \ldots, f_k \in \mathbb{F}$ $0 = f_1\boldsymbol{u}_1 + \ldots + f_k\boldsymbol{u}_k$ тогда и только тогда, когда $f_1 = \ldots = f_k = 0$ («U линейно независимо»).

Существование базиса очевидно для конечномерных векторных пространств, когда в качестве векторов базиса $\boldsymbol{u}$ можно взять единичные векторы координатных осей. Первый случай, когда базис найти трудно, – на самом деле граничит с таинством, – когда $\mathbb{R}$ рассматривается как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. В работе Hamel (1905) Гамель доказал существование базиса с помощью полного упорядочения $\mathbb{R}$, но так называемый базис Гамеля найти не проще, чем само полное упорядочение $\mathbb{Q}$.

Неудивительно, что все доказательства существования базиса в произвольном векторном пространстве опираются на АВ. Сейчас мы знаем, что избежать АВ невозможно, поскольку в работе Blass (1984) доказано, что существование такого базиса *эквивалентно* АВ в теории ZF.

1.6. Логика и вычислимость

Предыдущие разделы этой главы наводят на мысль, что система вещественных чисел $\mathbb{R}$ является неотъемлемой частью оснований математики. Когда в следующей главе мы обратимся к анализу, неотвратимость $\mathbb{R}$ станет еще более очевидной. В то же время мы видели, что наше понимание $\mathbb{R}$ никогда не будет полным – хотя бы в силу несчетности $\mathbb{R}$.

Поскольку мы не можем перечислить все вещественные числа, то, безусловно, не сможем перечислить и все относящиеся к ним *факты*, не говоря уже о том, чтобы предложить систему аксиом для их доказательства. Это наблюдение стало первым шагом на пути к глубоким теоремам Гёделя (Gödel, 1931) и Тьюринга (Turing, 1936) о недоказуемых теоремах и о неразрешимых алгоритмических задачах – пути, который мы более подробно опишем в главе 4.

Теорема Гёделя исключает существование полной системы аксиом для анализа. Но она же открывает некую возможность. Если нам повезет, то мы сможем найти *базовую теорию* для анализа, в которой удастся доказать, что желанные теоремы эквивалентны некоторым аксиомам – аксиомам, которые, подобно аксиоме параллельных в геометрии или AB в теории множеств, играют роль притяжения желанных теорем на свою «орбиту», состоящую из эквивалентных им теорем.

Так оно и случилось. Теперь мы знаем хорошую базовую теорию, RCA_0, и по крайней мере четыре *аксиомы существования множеств*, которые играют эту роль для теорем анализа. Более того, сила этих аксиом возрастает в том смысле, что из каждой следует предыдущая, поэтому они классифицируют теоремы анализа в порядке увеличения силы. Ключевые аксиомы постулируют «существование множества», а не «существование вещественного числа», потому что технически удобнее кодировать вещественные числа множествами натуральных чисел (детали см. в следующей главе). Каждая из этих аксиом утверждает, что существует множество натуральных чисел n, соответствующее свойству $\varphi(n)$ некоторого класса.

Для RCA_0 постулируется существование множества для класса *вычислимых* свойств $\varphi(n)$. Это такие свойства, для которых существует алгоритм, решающий, имеет ли место свойство $\varphi(n)$ для каждого n. Оказывается, что поскольку существуют невычислимые свойства, теория RCA_0 слишком слаба для доказательства многих важных теорем анализа. Но в RCA_0 можно доказать много эквивалентностей, поскольку это часто сводится к вычислению некоторого объекта (например, последовательности или функции) по данному объекту. Например, в RCA_0 невозможно доказать теорему Больцано–Вейерштрасса, но можно доказать, что эта теорема эквивалентна аксиоме, постулирующей существование множеств, реализующих любое *арифметически определимое свойство* $\varphi(n)$. Таким образом, если добавить последнюю аксиому в RCA_0, то мы получим более сильную систему, в которой теорема Больцано–Вейерштрасса доказуема.

Таким образом, мы обнаруживаем – и это довольно неожиданно, – что большинству хорошо известных теорем анализа можно приписать точный уровень «силы». Они либо находятся на самом низком уровне – доказуемы в RCA_0, – либо на более высоком уровне, представленном одной из четырех аксиом существования множеств. В этой книге мы будем заниматься в основном тремя нижними уровнями, на которых располагается большинство хорошо известных теорем анализа (см. главы 6 и 7).

Арифметизация

Из приведенного выше обсуждения видно, что прежде чем определять систему RCA_0, понадобится изучить арифметику и теорию вычислимости. Сама арифметика аксиоматизируется стандартным способом, восходящим к *аксиомам Пеано*, описанным в работе Peano (1889). Но прежде нам необходимо будет поговорить об *арифметизации* – как в смысле XIX века, когда «арифметическим» был сделан анализ, так и в смысле 30-х годов XX века, когда «арифметическими» были сделаны математическая логика и теория вычислимости.

Примечательное сведение анализа и вычислимости к общему источнику в арифметике – это то, благодаря чему возможна обратная математика анализа. Арифметизация анализа обсуждается в главе 2, теория вычислимости – в главе 4, а ее арифметизация – в главе 5. Мы также включили краткий курс вещественных чисел и непрерывности в главе 3, в т. ч. привели классические доказательства самых знаменитых теорем.