УДК 530.1
ББК **22.31Т**
С20

Сассман Дж. Дж., Уиздом Дж.

С20 Структура и интерпретация классической механики / пер. с англ. А. А. Слинкина. – М.: ДМК Пресс, 2023. – 488 с.: ил.

ISBN 978-5-97060-954-5

В настоящее время нам известно, что содержание классической механики гораздо богаче, чем представлялось раньше. Вывод уравнений движения – центральная тема традиционных изложений механики – всего лишь начало. В этой новаторской книге акцент сделан на разработке общих методов изучения поведения классических систем вне зависимости от того, имеют они аналитическое решение или нет. В фокусе внимания авторов сам феномен движения, а для его исследования применяется компьютерное моделирование. Недавние открытия в области нелинейной динамики органично вплетены в текст, а не добавлены по завершении работы. Изучение таких явлений, как переход к хаотическому движению и нелинейные резонансы, помогает читателю освоить аналитический инструментарий, необходимый для их понимания.

Издание адресовано студентам технических вузов, а также будет полезно всем, кто интересуется классической и современной физикой.

УДК 530.1
ББК 22.31Т

ISBN 978-0-262-02896-7 (англ.)

ISBN 978-5-97060-954-5 (рус.)

С благоговейным трепетом и священным восторгом
мы посвящаем эту книгу

ПРИНЦИПУ НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Автор приложил особые старания к тому, чтобы с как можно большей простотой и отчетливостью изложить руководящие идеи теории, придерживаясь в целом той их последовательности и связи, в какой они возникли в действительности. В интересах ясности я не останавливался перед частыми повторениями, нисколько не считаясь с изяществом изложения. Я добросовестно следовал предписанию гениального теоретика Л. Больцмана, рекомендовавшего заботу об изяществе представить портным и башмачникам.

А. Эйнштейн,
«*О специальной и общей теории относительности*»
(перев. с 12-го изд. под ред. проф. С. Я. Лифшица)

Содержание

Предисловие

«Почти во всех учебниках, даже в лучших, этот принцип представлен так, что его нельзя понять» (Якоби К., *Лекции по динамике*, 1842–1843). Не решусь нарушать эту традицию.

В. И. Арнольд, «Математические методы классической механики». Наука, 1974, [5]

Если вы не можете объяснить что-то просто, вы недостаточно хорошо это понимаете.

Альберт Эйнштейн

Заметное возрождение интереса к классической теоретической механике, наблюдающееся в последние годы, связано с открытием глубинных, не предполагавшихся ранее слоев познания. Поведение классических[1] систем оказалось удивительно богато; вывод уравнений движения, находящийся в центре внимания традиционной механики, – это только начало. В классических механических системах был обнаружен сложный набор явлений, таких как нелинейные резонансы, хаотическое поведение и фазовые переходы к стохастическому поведению или хаосу.

В традиционных методах механики большая часть усилий сосредоточена на исследовании чрезвычайно узкого класса динамических систем, поведение которых поддается аналитическому описанию. Мы же будем изучать общие методы исследования поведения систем независимо от того, имеют описывающие их уравнения аналитическое решение или нет. Реальные динамические системы демонстрируют поведение, принципиально отличающее их от аналитически разрешимых систем, и это поведение бывает удивительно сложным. Мы намерены широко использовать компьютерное моделирование для изучения явлений движения.

Даже когда уравнения движения механической системы не допускают аналитического решения, инструменты современной динамики позволяют получить качественное понимание законов движения. Вместо того чтобы громоздить формулы, мы концентрируемся на геометрических особенностях набора возможных фазовых траекторий. Такие методы обеспечивают возможности для систематического анализа численных или экспериментальных данных.

Простота классической механики обманчива. Легко можно получить правильный ответ, даже используя ошибочные исходные предположения, без реального понимания сути задачи. Традиционная система математических обозначений подчас добавляет сложностей пониманию. Символические обо-

[1] То есть нерелятивистских. – *Прим. перев.*

значения имеют значения, которые зависят от контекста, а иногда меняют свое значение даже в пределах одной задачи[2]. Теоретическая механика основывается на уравнениях Лагранжа. В канонической форме уравнения Лагранжа имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0.$$

Лагранжиан L здесь должен быть функцией обобщенных координат и скоростей q^i и $\dot{q}_i$, для того чтобы соответствующие частные производные были определены и существовали, однако чтобы производная по времени d/dt также была определена и существовала, в частные производные лагранжиана должны быть подставлены решения для траектории системы, дабы дифференцируемое выражение зависело только от времени. Традиционное использование неоднозначной нотации удобно в простых ситуациях, но в более сложных ситуациях может стать серьезным препятствием для четкого рассуждения. Чтобы выкладки были ясными и недвусмысленными, мы используем более точную математическую нотацию. Используемая нами нотация функциональна и соответствует современным математическим представлениям[3]. Ее подробное описание приведено в приложении.

Численные расчеты также необходимы для развития и реализации математических идей, лежащих в основе механики. Мы требуем, чтобы наши математические обозначения были настолько однозначными и точными, чтобы их можно было интерпретировать автоматически с помощью компьютера. Вследствие этого формулы и уравнения, которые появляются в тексте, существуют самостоятельно, имея четкое значение независимо от неформаль-

---

2 В своей книге по математической педагогике [17] Ганс Фрейденталь утверждает, что использование двусмысленных и неявных соглашений в таких выражениях, как $f(x)$ и $df(x)/dx$, делает понимание математики, и особенно вводный курс дифференциального и интегрального исчисления, чрезвычайно сложным для начинающих студентов. Он советует преподавателям математики по возможности использовать более формальную современную нотацию.

3 В своей прекрасной книге «Математический анализ на многообразиях» [40] Майкл Спивак использует операторную форму записи. На стр. 44 он обсуждает некоторые проблемы классической нотации. Мы приводим особенно пикантный отрывок: Простое выражение [для производной сложной функции] в классической системе обозначений требует введения не относящихся к делу символов. Обычно выражение для $D_1(f \circ (g, h))$ записывается следующим образом:
Если $f(u, v)$ – функция такая, что $u = g(x, y)$, $v = h(x, y)$, то:

$$\frac{\partial f(g(x,y),h(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

[Здесь $\partial u/\partial x$ означает $\partial/\partial x\, f(x, y)$ и $\partial/\partial u\, f(u, v)$ означает $D_1 f(u, v) = D_1 f(g(x, y), h(x, y))$.] Обычно это уравнение записывается в упрощенной форме:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Обратите внимание, что f в правой и левой частях этого уравнения имеет разный смысл!

ного контекста. Например, в операторной форме мы записываем уравнения Лагранжа следующим образом[4]:

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[q]) - \partial_1 L \circ \Gamma[q] = 0.$$

Здесь лагранжиан L – вещественная функция времени t, обобщенных координат x и скоростей v – $L(t, x, v)$. Обозначение частных производных позиционное – то есть для идентификации переменной, по которой берется производная, используется ее позиция или номер порядкового положения в обозначении функции; таким образом, оператор $\partial_2 L$ определяет функцию, полученную путем взятия частной производной функции Лагранжа L по переменной скорости, находящейся во второй позиции. Традиционные способы записи с частными производными, когда используются явно выписанные производные по «переменным», могут зависеть от контекста, что может привести к двусмысленности[5]. Частные производные лагранжиана затем явным образом вычисляются вдоль пути q. Берется производная по времени, и получаются уравнения Лагранжа. На каждом шаге используются только явные методы, вся процедура вывода уравнений движения из лагранжиана свободна от «скрытых» подстановок.

Численные методы применяются для точного расчета динамики при анализе механических систем. Реализация методов вариационной механики на языке компьютеров заставляет их быть однозначными и вычислительно эффективными. Численные расчеты требуют от нас точности в представлении механических и геометрических понятий как объектов вычислений и позволяют явно составлять алгоритмы для манипулирования этими объектами. Кроме того, после формализации в виде процедуры математическая идея становится инструментом, который можно использовать непосредственно для получения результатов.

Активное участие в исследовании со стороны студента является неотъемлемой частью процесса обучения. Необходимо сосредоточиться на глубоком понимании движения систем; чтобы понять эволюцию динамических систем, студент должен активно исследовать их движение с помощью компьютерного моделирования и эксперимента. Упражнения и проекты являются неотъемлемой частью процесса обучения.

То, что математический формализм достаточно точен, чтобы его можно было интерпретировать автоматически, позволяет использовать компьютеры для активных исследований. Требование, чтобы компьютер мог интерпретировать любое выражение, обеспечивает строгую и немедленную обратную связь относительно того, правильно ли сформулировано выражение.

---

[4] Здесь это уравнение приводится без пояснений, чтобы должным образом заинтриговать читателя. В основном тексте, разумеется, приведено подробное разъяснение.

[5] Приходится пользоваться аппаратом частных производных, а это такой объект, в самом обозначении которого уже кроется двусмысленность (В. И. Арнольд, *«Математические методы классической механики»* [5], §47, с. 222. См. также сноску на этой странице).

Опыт показывает, что такое интерактивное взаимодействие с компьютером быстрее выявляет и исправляет многие недостатки в понимании.

В этой книге мы используем для написания программ Scheme – вариант языка программирования Lisp, который также применяется на вводном курсе информатики в Массачусетском технологическом институте. Существует много хороших описаний Scheme, здесь мы приводим только краткое введение в этот язык программирования в приложении.

Даже во вводном курсе информатики мы никогда специально не занимаемся изучением языка, потому что это не нужно. Мы просто начинаем использовать его, вначале в простых ситуациях, и студенты способны успешно программировать уже через несколько дней. Это одно из больших преимуществ Lisp-подобных языков: у них очень мало способов формирования сложных выражений и почти нет синтаксической структуры. Все формальные свойства могут быть изучены за час, как правила шахмат. Через некоторое время мы забываем о синтаксических деталях языка (потому что их нет) и переходим к реальным задачам – выясняем, что мы хотим вычислить.

Преимущество Scheme перед другими языками для расчетов в области классической механики заключается в том, что манипулирование процедурами, реализующими математические функции, в нем организуется проще и естественнее, чем в других компьютерных языках. Действительно, многие теоремы механики непосредственно представимы в виде программ на Scheme.

Версия Scheme, которая используется в этой книге, – вариант MIT/GNU, дополненный большой библиотекой программ под названием Scmutils, расширяющей операторы Scheme с целью сделать их универсально применимыми к различным математическим объектам, включая символические выражения. Библиотека Scmutils также обеспечивает поддержку численных методов, которые мы используем в этой книге, таких как интегрирование, решение систем дифференциальных уравнений и многопараметрическая оптимизация.

Система Scheme, дополненная библиотекой Scmutils, является свободным программным обеспечением. Мы предоставляем эту систему в комплекте с документацией и исходным кодом в форме, которую можно использовать с операционной системой GNU/Linux, в интернете по адресу mitpress.mit.edu/classical_mech.

В этой книге классическая механика представлена с необычной точки зрения. Изложение направлено на понимание динамики механических систем, а не на вывод уравнений движения. Мы вводим последние достижения в области нелинейной динамики на протяжении всего курса, а не только как запоздалое дополнение. Используя операторную математическую систему обозначений, мы облегчаем точное понимание фундаментальных свойств классической механики. Мы применяем численные вычисления для закрепления изученного материала, для формализации методов, для моделирования и для аналитических вычислений.

Эта книга является результатом преподавания классической теоретической механики в Массачусетском технологическом институте. Содержание ее стало результатом объединения курса лекций по нелинейной динамике и динамике Солнечной системы профессора Уиздома и дополнения к вводному курсу информатики Абельсона и Сассмана по использованию компьютерных вычислений для формализации теоретических методов. Приступая к работе, мы ожидали, что использовать этот подход для формализации теоретической механики будет легко. Но быстро поняли, что многие вещи, которые, как нам казалось, были нам понятны, на самом деле таковыми не являлись. Наше требование, чтобы математические обозначения были достаточно четкими и точными, чтобы их можно было интерпретировать автоматически, с помощью компьютера, оказалось очень эффективным для выявления неоднозначностей и неточностей в рассуждениях. В результате борьба за то, чтобы сделать математику точной и при этом ясной и вычислительно эффективной, продолжалась гораздо дольше, чем мы ожидали. Благодаря этой работе мы многое узнали как о механике, так и о компьютерных вычислениях. Мы надеемся, что другие, особенно наши конкуренты, воспользуются этими методами, чтобы наконец начать понимать ту науку, которой они занимаются, пусть даже и ценой замедления исследований.

Второе издание

Мы преподавали курс теоретической механики в Массачусетском технологическом институте, используя этот учебник в течение всего времени с момента публикации первого издания[6]. Мы выявили ряд трудностей, с которыми сталкивались студенты, изучая материал. Обнаружилось, что некоторые из наших объяснений нуждаются в улучшении. Это издание является результатом нашего нового, улучшенного понимания.

Программное обеспечение и наши вычислительные возможности совершили гигантский скачок вперед за эти годы, и мы использовали его для предоставления алгебраических доказательств большей общности, чем это могло быть сделано в первом издании. Это преимущество пронизывает большую часть нового издания.

В первой главе мы теперь переходим прямо к координатному представлению действия, не жертвуя важностью независимости действия от координат. Мы также добавили простой вывод уравнений Эйлера–Лагранжа из принципа наименьшего действия, дополнив более формальный вывод в первом издании. В главе о движении твердого тела мы теперь приводим алгебраический вывод существования вектора угловой скорости. Наш новый вывод согласован с использованием обобщенных координат твердого тела в качестве параметров преобразования из базовой к фактической ориентации системы координат. Мы также приводим новый раздел об использовании кватернионов, чтобы избежать сингулярностей при анализе движения твердых тел.

Каноническим называется такое преобразование координат фазового пространства и связанное с ним преобразование гамильтониана системы, кото-

[6] Первое издание вышло в 2001 году. – *Прим. перев.*

рое обеспечивает взаимно однозначное соответствие между траекториями. Хоть и ценой усложнения методов работы с каноническими преобразованиями, мы допускаем, что лагранжиан системы и сами преобразования могут зависеть от времени. Глава о канонических преобразованиях была тщательно пересмотрена, чтобы прояснить связь канонических преобразований с симплектическими преобразованиями. Мы выделили в новую главу раздел, посвященный каноническим преобразованиям в задачах эволюции, включая преобразования Ли.

Мы исправили множество мелких ошибок. Очень хочется надеяться, что при этом мы не добавили их больше, чем удалили.

Глава 1

Механика Лагранжа

> Если я, без особого раздумья и не вдаваясь в подробные разъяснения, формулирую задачу механики таким образом: «механика имеет своей задачей описать, как с течением времени тела меняют свое место в пространстве», – то я рискую взять на свою душу несколько смертных грехов против святого духа ясности. Прежде всего надо вскрыть, в чем эти грехи заключаются.
>
> *А. Эйнштейн, «О специальной и общей теории относительности (общедоступное изложение)»* [16]

Предметом изучения в этой книге является движение твердых тел и математические инструменты, используемые для его описания.

Столетия тщательных наблюдений за планетами выявили ряд закономерностей в их движении и позволили научиться достаточно точно предсказывать такие явления, как затмения и соединения[1]. Попытка формально описать эти закономерности для предсказания движения небесных тел привела к развитию современной математики и открытию дифференциального исчисления как эффективного математического метода для описания реального физического мира. То, что математику можно использовать для описания природных явлений, уже само по себе явилось весьма примечательным фактом.

Булава, подброшенная жонглером, проходит предсказуемый путь и вращается предсказуемым образом. Само умение жонглировать в решающей степени зависит от этой предсказуемости. Самым замечательным стало открытие, что те же самые математические методы, которые используются для описания движения планет, могут быть использованы и для описания движения булавы в руках жонглера.

Классическая теоретическая механика описывает движение системы частиц под действием внешних сил. Сложные физические объекты, такие как булава жонглера, могут быть смоделированы как совокупность жестко свя-

[1] Соединение – в астрономии так называется расположение двух небесных тел на небесной сфере, при котором их эклиптические координаты близки или совпадают. Сами тела при этом могут быть сколь угодно далеки друг от друга в пространстве, просто для земного наблюдателя они находятся на одной линии наблюдения. – *Прим. перев.*

занных между собой мириад частиц с фиксированными пространственными связями между ними.

Можно представить себе множество возможных способов перемещения материальных тел динамической системы, которые в действительности никогда не происходят. Например, булава жонглера может зависнуть в воздухе или четырнадцать раз облететь вокруг его головы, прежде чем ее поймают, но в реальности такого не бывает. Как отличить движения системы, которые действительно происходят, от других геометрически возможных движений? Возможно, существует какая-то математическая функция, позволяющая отличить реализуемые движения от всех геометрически допустимых?

Движение системы можно описать, указав положение каждой части системы в каждый момент времени. Такое описание называется *конфигурационной траекторией* и определяет конфигурацию в виде функции от времени. Булава жонглера вращается во время полета; ее конфигурация определяется положением в пространстве и ориентацией. Движение булавы полностью определено, если ее положение и ориентация заданы в виде функции от времени.

Искомая функция, различающая траектории, принимает на входе траекторию системы и возвращает какой-то выход. Мы хотим, чтобы эта функция имела характерное поведение, когда на вход «подается» физически реализуемая траектория. Например, «выход» мог бы быть числом, и мы могли бы попытаться сделать так, чтобы это число было равно нулю только на реализуемых траекториях. Законы движения в механике имеют именно такую форму; в каждый момент времени должны выполняться дифференциальные уравнения Ньютона[2].

Однако существует альтернативная стратегия, которая обеспечивает лучшее постижение и большую предсказательную способность: мы могли бы искать функцию, различающую траектории, которая будет достигать локального минимума на реальных траекториях – на близлежащих физически невозможных траекториях значение этой функций будет большим, чем на реальной траектории. Это *вариационный метод*: для каждой физической системы мы вводим функцию различения траекторий, которая выделяет реализуемые движения системы, обладая стационарной точкой для каждой допустимой траектории[3]. В целях большей общности поиск реальных траекторий любой системы может быть описан с помощью вариационного принципа[4].

---

[2] Имеется в виду, что уравнения Ньютона выполняются строго локально, т. е. в окрестности точки, при этом из самих этих уравнений нельзя извлечь никакой общей информации о поведении системы. – *Прим. перев.*

[3] Стационарная точка функции – это точка, в которой вариация значения функции равна нулю при изменении входных данных. Локальные максимумы или минимумы являются стационарными точками.

[4] Вариационный принцип успешно описывает всю ньютонову механику частиц и твердых тел. Вариационный метод также был с пользой применен при описании многих других систем, как то: в классической электродинамике, гидродинамике невязких жидкостей и проектировании механизмов, например в задаче о четырехзвенном шарнире. Кроме того, современные формулировки квантовой механики и квантовой теории поля основаны на вариационном принципе. Однако, по-видимому, не все динамические системы могут быть описаны вариационным методом. Например, не существует простого способа применить аппарат вариационного исчисления к диссипативным системам, хотя в некоторых частных случаях вариационные методы все еще могут использоваться.

Уравнения механики, изобретенные Ньютоном и другими людьми его эпохи, описывают движение системы в терминах положений, скоростей и ускорений каждой из частиц в системе. Вариационная формулировка, в отличие от локальной ньютоновой формулировки механики в терминах дифференциалов, описывает движение системы в терминах интегральных величин, которые связаны с движением и положением системы как целого.

В ньютоновой формулировке силы, как правило, могут быть выражены как производные от потенциальной энергии системы. Движение системы определяется действием этих сил на составляющие ее части. Ньютонова формулировка уравнений движения по своей сути является описанием взаимодействий типа частица–частица.

В вариационной формулировке уравнения движения возникают как результат математического преобразования функции, равной разности кинетической и потенциальной энергий. Потенциальная энергия – это величина, характеризующая расположение частиц в системе; кинетическая энергия определяется скоростями частиц в системе. Ни потенциальная, ни кинетическая энергия не зависят от того, каким образом заданы эти положения и скорости. Их разница описывает всю систему как единое целое и не зависит от деталей того, какими параметрами эта система определена. Таким образом, мы свободны в выборе такого способа описания системы, с которым нам было бы легко работать; нет необходимости точно описывать взаимодействия между всеми частями системы, что присуще формулировке Ньютона.

Использование вариационного принципа дает множество преимуществ по сравнению с ньютоновой формулировкой законов движения. Процедура вывода уравнений движения для тех параметров, которые описывают поведение системы, не зависит от выбора этих параметров и от выбора системы координат. Если между частями системы существуют ограничения на перемещения (связи), ньютонова формулировка динамики требует введения дополнительных сил, создающих эти ограничения, тогда как в вариационной формулировке связи могут быть встроены в координаты. Вариационная формулировка явным образом вскрывает связь законов сохранения с симметриями[5]. Она обеспечивает определение конкретного движения системы в контексте всех возможных движений системы. Мы придерживаемся вариационной формулировки из-за этих преимуществ.

1.1. Конфигурационное пространство

Рассмотрим механические системы, предполагая их состоящими из точечных частиц, имеющих массу и положение, но не имеющих внутренней структуры[6]. Протяженные тела можно рассматривать как состоящие из большо-

[5] Теорема Нётер. – *Прим. перев.*

[6] Мы часто называем частицу без внутренней структуры, имеющую массу, точечной массой.

го числа таких точечных частиц с заданными пространственными связями между ними. Протяженные тела сохраняют свою форму из-за ограничений на пространственные перемещения между составляющими их частицами. Указание положения всех составляющих частиц системы определяет ее *конфигурацию*. Наличие связей – ограничений на перемещения частей системы, подобных тем, что определяют форму протяженного тела, – означает, что составляющие ее точечные массы не могут занимать все возможные положения в пространстве. Набор всех допустимых, с учетом связей, конфигураций называется *конфигурационным пространством* системы. *Размерность* конфигурационного пространства – это наименьшее количество параметров, которые должны быть заданы для полного указания положения всех частиц системы. Размерность конфигурационного пространства также называется *числом степеней свободы* системы[7].

Положение в пространстве одной свободной частицы, на движения которой не наложены ограничения, может быть описано тремя параметрами; точечная частица имеет трехмерное конфигурационное пространство. Если мы имеем дело с системой, состоящей из большего числа точечных частиц, конфигурационное пространство становится более сложным. Если существует k независимых частиц, нам нужно $3k$ параметров для описания возможных конфигураций. Если между частями системы существуют связи, размерность конфигурационного пространства уменьшается. Например, система в трехмерном пространстве, состоящая из двух точечных частиц, связанных так, что расстояние между ними остается неизменным, имеет пятимерное конфигурационное пространство: таким образом, с помощью трех чисел мы можем определить положение одной из частиц, а с помощью двух других параметров – задать положение второй частицы относительно первой.

Рассмотрим булаву жонглера. Безусловно, мы вполне можем задать конфигурацию булавы, если определим положение всех составляющих ее атомов. Однако существуют более экономичные описания конфигурации недеформируемых физических объектов. Если принять идеализированное допущение, что булава жонглера «абсолютно жесткая», то расстояния между всеми ее атомами остаются постоянными. Таким образом, мы можем указать направление главной оси булавы, указав положение одного атома и ее ориентацию в пространстве. Используя заданные связи, на основе этой информации можно определить положение всех остальных атомов булавы. Размерность

[7] Строго говоря, размерность конфигурационного пространства и число степеней свободы не совпадают. Число степеней свободы – это размерность «локально доступной» области конфигурационного пространства. Для систем с интегрируемыми связями это одно и то же. Для систем с неинтегрируемыми связями размерность конфигурационного пространства может быть больше, чем число степеней свободы. Дополнительные пояснения мы приведем в разделе 1.10.3, когда будем обсуждать системы с неинтегрируемыми связями. За исключением этого раздела, во всех рассматриваемых нами системах используются только интегрируемые связи (то есть они являются «голономными»). Вот почему мы решили размыть здесь различие между числом степеней свободы и размером конфигурационного пространства.

конфигурационного пространства булавы жонглера равна шести: минимальное количество параметров, определяющих положение одного из атомов в пространстве, равно трем, и минимальное количество параметров, определяющих ориентацию, также равно трем.

В то время как система совершает свою эволюцию со временем, составляющие ее частицы движутся в соответствии с наложенными на них ограничениями. Движение каждой составляющей частицы системы определяется математическим описанием изменяющейся конфигурации. Таким образом, движение системы можно описать как эволюцию по траектории в конфигурационном пространстве. Траектория в конфигурационном пространстве может быть задана функцией траектории системы, которая позволяет определить конфигурацию системы в любой момент времени.

Упражнение 1.1. Степени свободы

Для каждой из механических систем, описанных ниже, укажите число степеней свободы конфигурационного пространства.

a. Три булавы жонглера.

b. Сферический маятник, состоящий из точечной массы (груз маятника), подвешенной на жестком невесомом стержне, прикрепленном к неподвижной точке подвеса. Груз может двигаться под действием однородной силы тяжести в любом направлении, но с ограничениями, налагаемыми жестким стержнем.

c. Двойной сферический маятник, состоящий из одной точечной массы, подвешенной на жестком невесомом стержне, прикрепленном ко второй точечной массе, подвешенной на втором невесомом стержне, прикрепленном к неподвижной точке подвеса в поле однородной силы тяжести.

d. Точечная масса, скользящая без трения по жесткой изогнутой проволоке.

e. Жесткий осесимметричный волчок в поле однородной гравитационной силы, закрепленный на неподвижной опоре в одной точке, находящейся на оси симметрии.

f. То же самое, что **e**, но волчок не осесимметричный или точка закрепления не на оси симметрии.

1.2. Обобщенные координаты

Чтобы иметь возможность говорить о конкретной конфигурации системы, нам необходимо ввести набор однозначно определяющих ее параметров. Параметры, используемые для задания конфигурации системы, называются *обобщенными координатами*. Рассмотрим свободную частицу без ограничений и связей, которая, как мы уже установили, имеет три степени свободы. Конфигурация механической системы, состоящей из такой частицы, определяется путем указания ее положения в пространстве. Для этого потребуется три параметра, например можно указать ее прямоугольные координаты относительно некоторых координатных осей. Компоненты радиус-вектора частицы в декартовой системе координат являются в этом случае обобщенными координатами свободной частицы. Или рассмотрим идеальный двойной маятник в вертикальной плоскости: одна точечная масса связана с неподвижной точкой жестким нерастяжимым стержнем и соединена другим жестким нерастяжимым стержнем со второй точечной массой. Мы однозначно определим состояние этой системы, если будем знать ориентацию, то есть угол поворота каждого из двух стержней. Это означает, что для задания такой системы требуется по крайней мере два параметра; двойной маятник на плоскости имеет две степени свободы. Один из способов указать ориентацию стержня – задать угол, который он образует с вектором силы тяжести. Эти два угла являются обобщенными координатами для двойного маятника, совершающего колебания в одной плоскости.

Количество обобщенных координат необязательно должно совпадать с размерностью конфигурационного пространства, хотя их должно быть по меньшей мере столько же. Мы можем определить систему бо́льшим числом обобщенных координат, чем это необходимо, но тогда нам придется наложить на эти координаты ограничения, чтобы решением задачи движения оказались только допустимые траектории.

Для плоского двойного маятника, описанного выше, достаточно двух угловых координат, чтобы указать конфигурацию. Однако мы могли бы взять в качестве обобщенных координат прямоугольные координаты каждой из масс в плоскости относительно некоторых выбранных координатных осей. Выбранные таким образом обобщенные координаты также точно описывают движение маятника, но мы должны будем явно ввести связи, которые ограничивают возможные конфигурации фактической геометрией системы. Использование обобщенных координат в том же числе, что и размерность конфигурационного пространства, облегчает исследование системы, потому что нам не нужно иметь дело с явными ограничениями на обобщенные координаты. Поэтому пока мы будем рассматривать только такие постановки задач, в которых количество обобщенных координат равно числу степеней свободы; позже мы узнаем, как обращаться с системами с избыточными координатами и явными ограничениями.

В общем случае обобщенные координаты образуют пространство M некоторой размерности n. Конфигурационное пространство размерности n можно параметризовать, выбрав функцию координат χ, которая ставит в соответствие элементам конфигурационного пространства наборы из n действительных чисел – n-кортежи[8]. В случае более чем одного измерения функция χ представляет собой кортеж из n независимых координатных функций[9] χ^i, $i = 0,1, \ldots, n - 1$, где каждая из функций χ^i является вещественной функцией, определенной в некоторой области конфигурационного

---

[8] Кортежем называется упорядоченный набор элементов, принадлежащих одному множеству. Каждый элемент кортежа, в свою очередь, может быть кортежем.

[9] Кортеж из функций, принадлежащих одному множеству, сам по себе является функцией в этом множестве: для заданной точки множества значение кортежа функций является кортежем значений функций компонентов кортежа в этой точке.

пространства[10]. Для заданного состояния (или конфигурации)[11] системы m в конфигурационном пространстве M значения $\chi^i(m)$ координатных функций являются его обобщенными координатами. Эти обобщенные координаты позволяют установить соответствие между точками n-мерного конфигурационного пространства и n-кортежами действительных чисел[12]. Для любого заданного конфигурационного пространства существует множество способов выбора обобщенных координат. Даже для одной свободно движущейся материальной точки мы можем выбирать прямоугольные координаты, полярные координаты или любую другую систему координат, которая нам нравится или наилучшим образом отражает геометрические особенности задачи.

Движение системы может быть описано траекторией в конфигурационном пространстве. Траектория системы представляет собой отображение времени в точки конфигурационного пространства. Траектории в конфигурационном пространстве соответствует *траектория в координатном пространстве* $q = \chi \circ \gamma$, представляющая собой отображение времени в кортежи обобщенных координат[13]. Если существует более одной степени свободы, то траектория в координатном пространстве является структурным объектом: q – кортеж функций компонент координат $q^i = \chi^i \circ \gamma$. В каждый момент времени t значения $q(t) = (q^0(t), \ldots, q^{n-1}(t))$ являются обобщенными координатами состояния системы.

Производная Dq от обобщенной координаты пути q является функцией[14], которая определяет скорость изменения координат в данный момент времени: $Dq(t) = (Dq^0(t), \ldots, Dq^{n-1}(t))$. Скорость изменения обобщенной координаты называется *обобщенной скоростью*.

---

10 Использование верхних индексов для обозначения компонентов координат является достаточно традиционным, хотя и существует потенциальный риск путаницы с показателями степени. Нумерация индексов начинается с нуля.

11 Здесь следует сделать замечание: авторы повсеместно используют термин «конфигурация» для обозначения положения системы в конфигурационном пространстве и в то же время для состояния динамической системы, т. е. конкретного набора обобщенных координат ее. В русском языке более традиционно использование терминов «состояние» или «положение», например в таком сочетании: «… положение системы в фазовом пространстве…». Можно было бы сохранить традиционный для русских книг по теоретической механике терминологический словарь, но, с другой стороны, «конфигурация» используется и у нас, поэтому в основном в книге сохранен именно этот термин. – *Прим. перев.*

12 Точнее, обобщенные координаты устанавливают соответствие открытых подмножеств конфигурационного пространства с открытыми подмножествами R^n. Для покрытия всего конфигурационного пространства может потребоваться более одного набора обобщенных координат. Например, если конфигурационное пространство представляет собой двумерную сферу, у нас может быть один набор координат, который отображает северное полушарие на диск, и другой набор, который отображает южное полушарие на диск, с полосой вблизи экватора, общей для обеих этих систем координат. Пространство, которое может быть локально определено гладкими координатными функциями, называется *дифференцируемым многообразием*.

13 Здесь символ $\circ$ обозначает композицию функций: $(f \circ g)(t) = f(g(t))$.

14 Производная функции f – это тоже функция, обозначаемая Df. В нашей нотации оператор D имеет наивысший приоритет; таким образом, D действует на функцию до того, как будет получено значение самой функции: $Df(x)$ равно $(Df)(x)$.

Упражнение 1.2. Обобщенные координаты

Для каждой из систем в упражнении 1.1 укажите систему обобщенных координат, которую можно использовать для описания ее поведения.

1.3. Принцип наименьшего действия

Предположим, что для каждой физической системы существует различающая траектории функция, стационарная на реализуемых траекториях. Попытаемся вывести некоторые свойства такой функции, используя только это условие.

Наблюдение движения

Наш повседневный опыт подсказывает, что движение материальных тел, как правило, может быть описано непрерывными и гладкими траекториями в конфигурационном пространстве[15]. Никто не видел, чтобы булава жонглера внезапно перескакивала с одного места на другое. Мы также не наблюдаем, чтобы булава внезапно и резко меняла направление своего движения.

Из опыта наблюдений мы знаем, что движение физических систем не зависит от всей предыстории системы. Если мы войдем в комнату в тот момент, когда булава уже находится в воздухе, мы не сможем определенно сказать, когда она покинула руку жонглера. Жонглер мог бы бросить булаву из разных мест комнаты в разное время, так чтобы она находилась в той же самой точке, в которой и была, когда мы входили в дверь[16]. Таким образом, движение булавы не зависит от всех деталей истории.

В то же время опыт говорит нам, что движение физических систем жестко детерминировано. На самом деле знание весьма небольшого количества параметров обобщает важные аспекты истории системы и предопределяет ее дальнейшую эволюцию. Например, если мы знаем в произвольный момент времени положение и скорость движения центра масс, ориентацию и скорость изменения ориентации булавы, то этого окажется достаточно, чтобы полностью определить ее дальнейшее движение.

Реализуемые траектории

Опыт повседневных и научных экспериментальных наблюдений позволяет высказать определенные соображения относительно реализуемых конфи-

---

[15] Опыт работы с системами, для которых необходим учет квантово-механических эффектов, показывает, что в этом случае строго определенной траектории в конфигурационном пространстве не существует. Для описания эволюции систем в масштабе атомов мы используем квантовую механику. Здесь мы ограничим рассмотрение системами, для которых движение хорошо описывается гладкими конфигурационными траекториями.

[16] Экстраполяция орбиты Луны назад во времени не позволит определить точку, из которой она попала на эту орбиту. Чтобы определить начальную точку движения Луны, мы должны дополнить расчет динамики ее движения другими физическими аргументами, например сведениями о ее химическом составе.

гурационных траекторий. Если траектория реализуема, то и любая, сколь угодно малая или большая, ее часть является реализуемой траекторией. И наоборот, траектория реализуема, если каждый, сколь угодно малый, отрезок ее является реализуемой траекторией. Реализуемость траектории определяется реализуемостью всех ее точек. Реализуемость отрезка траектории зависит от каждой его точки таким же образом; никакая часть траектории не является особенной. Реализуемость отрезка траектории зависит только от составляющих его точек; реализуемость является локальным свойством отрезка.

Таким образом, искомая различающая траектории функция агрегирует некоторое локальное свойство системы, измеренное в каждый момент вдоль отрезка траектории. Каждый момент времени при движении по траектории должен рассматриваться одинаково. Вклады каждого момента на отрезке траектории должны быть объединены таким образом, чтобы сохранить независимость вкладов от непересекающихся отрезков. Простейшим методом учета всех вкладов от всех точек, удовлетворяющим требованию аддитивности, является их суммирование, что позволяет представить искомую функцию траектории как интеграл от некоторого локального свойства траектории[17].

Поэтому мы попытаемся построить различающую траектории функцию, основываясь на интеграле локального свойства траектории, так чтобы она принимала стационарное значение для любой реализуемой траектории. Такая различающая траектории функция традиционно называется *действием* системы. Мы используем слово «действие», чтобы соответствовать общепринятой и исторически сложившейся практике. Возможно, было бы точнее называть этот объект «различающей траектории функцией», но тогда другим было бы труднее понять, о чем идет речь[18].

Чтобы следовать исходным предположениям вариационной механики, мы должны определить действие как такую функцию, которая будет стационарна на реализуемых траекториях динамических систем. Мы рассмотрим действия, которые будут интегралами некоторого локального свойства конфигурационной траектории в каждый момент времени. Пусть $q = \chi \circ \gamma$ – траектория в конфигурационном пространстве; $q(t)$ – координаты, описывающие положение системы в момент времени t. Тогда, по определению, действие на отрезке траектории в интервале времени от t_1 до t_2 будет равно[19]:

---

[17] Мы подозреваем, что это рассуждение можно развить вплоть до точного ограничения на возможные способы создания такой функции.

[18] Исторически сложилось так, что Гюйгенс был первым, кто использовал термин «действие» в механике, имея в виду «эффект движения». Эта идея пришла к нам от греков. В своей книге «Динамика» (1690) Лейбниц сформулировал «Принцип наименьшего действия», используя «безвредное действие», которое было произведением массы, скорости и пройденного пути. Лейбниц также говорил о «насильственном действии» в случае столкновения тел.

[19] Определенный интеграл от вещественной функции f вещественного аргумента записывается в нашей нотации как $\int_a^b f$. Традиционно это записывается как $\int_a^b f(x)dx$. Наша нотация подчеркивает, что интеграл берется именно от функции.

$$S[q](t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} F[q], \tag{1.1}$$

где $F[q]$ – некоторая функция времени, измеряющая некоторое локальное свойство траектории. Она может зависеть от значений функции q и всех ее производных в данный момент времени[20].

Мы можем локально описать траекторию в конфигурационном пространстве в любой момент времени в зависимости от обобщенных координат, скоростей их изменения и всех их высших производных. Зная эту информацию, можно восстановить траекторию на некотором интервале, содержащем этот момент времени[21]. Локальные свойства траектории могут зависеть только от ее локального описания (т. е. координат и их производных).

Функция F, заданная на координатной траектории q, определяет некоторую локальную характеристику или свойство. Мы можем разложить $F[q]$ на две части: часть, которая определена как некоторая характеристика локального описания, и часть, которая извлекает локальное описание из функции траектории. Функция, определяющая локальное свойство, зависит от конкретной физической системы; сам метод построения локального описания траектории одинаков для любой системы. Мы можем записать $F[q]$ как композицию этих двух функций[22]:

$$F[q] = L \circ \Gamma[q]. \tag{1.2}$$

Функция Γ зависит от траектории в пространстве обобщенных координат и представляет собой зависящий от времени упорядоченный кортеж, содержащий время, координаты, скорость изменения координат и значения высших производных координат, вычисленных в этот момент времени. Для траектории q и момента времени t:

$$\Gamma[q] = (t, q(t), Dq(t), \ldots). \tag{1.3}$$

Назовем этот кортеж, включающий в себя столько производных, сколько необходимо, *локальным кортежем*. Функция $\Gamma[q]$ зависит только от координатной траектории q и ее производных по времени и не зависит от χ или от того, что q – сложная функция, полученная композицией χ и γ.

---

[20] Традиционно функциональные аргументы заключаются в квадратные скобки. В этом случае квадратные скобки напоминают нам, что значение S может зависеть от функции q сложным образом, например через ее производные.

[21] В случае действительной функции ее значения и значения ее производных в какой-то момент могут быть получены разложением в степенной ряд. Для достаточно «хороших» функций (аналитических) степенной ряд, построенный таким образом, будет сходиться в некотором интервале, содержащем точку. Но не все функции могут быть локально представлены подобным образом. Например, функция $f(x) = \exp(-1/x^2)$ принимает значение $f(0) = 0$, и все ее производные равны нулю при $x = 0$, но всего этого бесконечного числа производных недостаточно для определения значения данной функции в любой другой точке, даже сколь угодно близкой к 0.

[22] В нашей нотации применение зависящей от траектории функции к своей траектории имеет более высокий приоритет, чем композиция, поэтому $L \circ \Gamma(q) \equiv L \circ (\Gamma(q))$.

Функция L определяется конкретной исследуемой физической системой и не зависит от конкретной траектории в конфигурационном пространстве. Функция L определяет локальную вещественную характеристику на траектории. Мы обнаружим, что для вычисления L требуется только конечное число компонентов локального кортежа: траектория может быть локально восстановлена из полного локального описания; то, что L зависит от конечного числа компонентов локального кортежа, гарантирует, что она измеряет локальное свойство[23].

Преимущество такого разложения заключается в том, что локальное описание пути вычисляется единым образом на основании траектории в конфигурационном пространстве, независимо от рассматриваемой системы. Вся информация, относящаяся к конкретной системе, сосредоточена в функции L.

Функция L называется *лагранжианом*[24] системы, а результирующее действие

$$S[q](t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} L\circ\Gamma[q] \tag{1.4}$$

называется *действием Лагранжа*. Для лагранжианов, зависящих только от времени, координат и скоростей, выражение для действия может быть также записано в виде

$$S[q](t_1,t_2)=\int_{t_1}^{t_2} L\big(t,q(t),Dq(t)\big)dt. \tag{1.5}$$

Лагранжиан можно ввести для самых разных систем. Мы увидим, что для большинства систем лагранжиан можно определить как разницу между кинетической и потенциальной энергиями. Подобные лагранжианы зависят только от времени, положения в конфигурационном пространстве и скорости изменения этого положения. Мы сосредоточимся в основном на таком классе систем, но иногда будем рассматривать и системы более общего вида.

Реализуемая траектория системы отличается от других тем, что действие на этой траектории минимально или стационарно по отношению к некоторому набору близлежащих геометрически возможных траекторий. Однако

[23] Позже мы обнаружим, что начального локального кортежа достаточно для определения будущей эволюции системы. То, что начальная конфигурация и конечное число производных определяют будущее, означает, что существует способ определения всех остальных производных траектории, основываясь на начальной точке в конфигурационном пространстве.

[24] Классический лагранжиан играет фундаментальную роль в формулировке квантовой механики (благодаря Дираку и Фейнману), где комплексная экспонента классического действия определяет амплитуду вероятности траектории. Лагранжиан является отправной точкой для гамильтоновой формулировки механики (обсуждаемой в главе 3), которая также важна в формулировках квантовой механики Шредингера и Гейзенберга и в подходе Больцмана–Гиббса к статистической механике.

некоторые траектории, близкие к реализуемой, также будут реализуемыми: для любого движения булавы есть другое, которое отличается на «совсем чуть-чуть». Поэтому при решении вопроса о том, является ли действие стационарным по отношению к вариациям траектории, мы должны каким-то образом ограничить набор рассматриваемых траекторий, чтобы реализуемая траектория оказалась единственной. Это кажется удивительным, но, как мы установим, решение задачи о стационарной точке действия существует и единственно для лагранжианов, зависящих только от положения и скорости изменения положения в фазовом пространстве. При этом достаточно ограничиться такими траекториями, для которых система имеет одинаковую конфигурацию в начальной и конечной точках[25].

Принцип стационарного действия утверждает, что для каждой динамической системы мы можем ввести функцию лагранжиана такую, что реализуемая траектория между двумя положениями, соответствующими моментам времени t_1 и t_2, отличается от всех геометрически возможных траекторий тем, что действие $S[q](t_1, t_2)$ является стационарным по отношению к вариациям траектории[26]. Для лагранжианов, которые зависят только от положения и скорости изменения положения, вариации ограничены теми, которые сохраняют положения системы в моменты времени t_1 и t_2[27].

---

[25] То есть начальное и конечное положения системы однозначно определяют траекторию для данного лагранжиана, если он зависит только от координат и скоростей. – *Прим. перев.*

[26] Принцип становится «принципом наименьшего действия», если траектория достаточно коротка. В более общем случае действие является стационарным. Термин «принцип наименьшего действия» также обычно используется, поскольку был введен Мопертюи, Эйлером и Лагранжем, доказавшими, что свободные частицы движутся по траекториям, для которых интеграл кинетической энергии минимален среди всех траекторий с заданными начальной и конечной точками. Соответственно, термин «действие» иногда используется для обозначения конкретно интеграла кинетической энергии. (На самом деле Эйлер и Лагранж использовали *vis viva*, или удвоенную кинетическую энергию.)

[27] Некоторые другие способы изложения принципа стационарного действия делают его телеологичным и таинственным. Например, можно было бы представить, что система «рассматривает» все возможные траектории от начального до конечного положения, а затем «выбирает» ту из них, для которой действие минимально. На самом деле лежащее в основе этого подхода видение целенаправленной, экономичной и рациональной вселенной сыграло немалую роль в философских соображениях, сопровождавших первоначальное развитие механики. Самый ранний вариант принципа наименьшего действия, который навсегда останется частью современной физики, – принцип Ферма, гласящий, что путь, пройденный лучом света между двумя точками, – это путь, требующий наименьшего времени. Ферма сформулировал этот принцип около 1660 года и использовал его для вывода законов отражения и преломления. Руководствуясь этим выводом Ферма, французский математик и астроном Пьер-Луи Моро де Мопертюи провозгласил принцип наименьшего действия великим объединяющим принципом в физике. В своем эссе «Космология» (1750) Мопертюи апеллировал к этому принципу «экономии в природе» как к доказательству существования Бога, утверждая, что он демонстрирует «намерение Бога регулировать физические явления общим принципом высшего совершенства». Исторический взгляд на роль Мопертюи, Эйлера и Лагранжа в формулировке принципа наименьшего действия см. в [28].

Упражнение 1.3. Оптика Ферма

Ферма заметил, что законы отражения и преломления могут быть объяснены следующими фактами: свет движется по прямой линии в любой конкретной среде со скоростью, зависящей от среды. Путь, пройденный лучом от источника к месту назначения через любую последовательность сред, является путем наименьшего общего времени по сравнению с соседними путями. Покажите, что из этих физических аксиом можно вывести законы отражения и преломления[28].

1.4. Вычисление действий

Чтобы проиллюстрировать вышеизложенные идеи, сформулировав их в виде компьютерных программ, мы рассмотрим простейшую механическую систему – свободную частицу, движущуюся в трехмерном пространстве. Эйлер и Лагранж обнаружили, что для свободной частицы интеграл от кинетической энергии по времени вдоль фактической траектории частицы меньше, чем тот же интеграл по любому другому пути между теми же точками: свободная частица движется в соответствии с принципом стационарного действия, при условии что мы берем в качестве лагранжиана кинетическую энергию. Кинетическая энергия частицы с массой m и скоростью $\vec{v}$ равна $\frac{1}{2}mv^2$, где v – модуль вектора скорости $\vec{v}$. В качестве обобщенных координат материальной точки мы можем использовать прямоугольные декартовы координаты.

Согласно Эйлеру и Лагранжу, лагранжиан свободной частицы равен[29]:

$$L(t,x,v) = \frac{1}{2}m(v \cdot v), \tag{1.6}$$

где формальный параметр x именует кортеж компонентов положения системы в заданной прямоугольной системе координат, а формальный параметр v именует кортеж компонентов скорости[30].

---

[28] При отражении луча света от поверхности угол падения равен углу отражения. Преломление описывается законом Снелла: когда свет проходит от одной среды к другой, отношение синусов углов к нормали границы раздела обратно пропорционально отношению показателей преломления среды. Показатель преломления – это отношение скорости света в вакууме к скорости света в среде.

[29] Данное здесь определение функции позволяет вычислять ее значение для произвольно выбранных формальных параметров. Само имя или обозначение формального параметра можно изменить, если новое имя не совпадает с каким-либо уже используемым символом в определении. Например, следующее определение задает точно такой же лагранжиан свободной частицы:

$$L(a,b,c) = \frac{1}{2}m(c \cdot c).$$

[30] Чисто формально лагранжиан является функцией локального кортежа, но любой конкретный лагранжиан зависит только от конечного и начального сегментов локального кортежа. Мы определяем функции локальных кортежей, явно объявляя имена для элементов начального сегмента локального кортежа, который включает элементы, от которых зависит функция.

Мы можем представить эту формулу в виде процедуры:

```
(define ((L-free-particle mass) local)
  (let ((v (velocity local)))
     (* 1/2 mass (dot-product v v))))
```

Здесь `L-free-particle` – процедура, которая принимает массу в качестве аргумента и возвращает процедуру, которая принимает локальный кортеж `local`, извлекает из него обобщенную скорость с помощью процедуры `velocity` и использует эту скорость для вычисления значения лагранжиана[31].

Обозначим q функцию траектории, которая отображает время в компоненты положения системы[32]:

$$q(t) = (x(t), y(t), z(t)). \tag{1.7}$$

Определим ее следующим образом[33]:

```
(define q
  (up (literal-function 'x)
      (literal-function 'y)
      (literal-function 'z)))
```

где `literal-function` создает процедуру, представляющую функцию одного аргумента, не имеющую никаких других свойств, кроме заданного символического имени. Символ q теперь определяет процедуру с одним вещественным аргументом (временем), которая создает кортеж из трех компонентов, представляющих координаты в этот момент времени. Например, мы можем записать эту процедуру для символического времени t следующим образом:

```
(q 't)
(up (x t) (y t) (z t))
```

---

[31] Мы представляем локальный кортеж как составную структуру данных, компонентами которой являются время, обобщенные координаты, обобщенные скорости и, возможно, производные обобщенных координат более высоких порядков. Мы не хотим заниматься упаковкой и распаковкой компонентов таких структур, поэтому предоставляем необходимые для этого утилиты.

[32] Осторожно! Символ x в определении q – не то же самое, что x, использовавшийся в качестве формального параметра в определении лагранжиана свободной частицы. В алфавите не так уж много символов, поэтому мы вынуждены использовать их повторно. Мы будем всегда отмечать места, где символам придается новое значение.

[33] Кортеж компонентов координаты или скорости создается с помощью процедуры `up`. i-й компонент кортежа q равен `(ref q i)`. Нумерация индексов начинается с нуля. Использование для этой процедуры имени `up` должно напоминать, что в математической записи на бумаге эти компоненты снабжаются верхними индексами (up – верх). Существуют также создаваемые процедурой `down` кортежи компонентов, снабжаемых нижними индексами. См. главу 9, посвященную нотации.
Конструктор `up` используется для упаковки времени, координат и скоростей в структуру данных, представляющую локальный кортеж. Селекторы `time`, `coordinate` и `velocity` извлекают соответствующие элементы из локальной структуры. Процедура `time` совпадает с процедурой `(component 0)`, и аналогично `coordinate` – то же самое, что `(component 1)`, а `velocity` – то же самое, что `(component 2)`.

Производная от координат траектории – это функция, отображающая время в компоненты скорости:

$$Dq(t) = (Dx(t), Dy(t), Dz(t)).$$

Мы можем создать и использовать производную функции[34]. Например, можно написать:

```
((D q) 't)
(up ((D x) t) ((D y) t) ((D z) t))
```

Функция Γ принимает траекторию в координатном пространстве и возвращает функцию времени, которая дает локальный кортеж $(t, q(t), Dq(t), \ldots)$. Мы реализуем эту функцию Γ с помощью процедуры `Gamma`[35]. Вот что она делает:

```
((Gamma q) 't)
(up t
    (up (x t) (y t) (z t))
    (up ((D x) t) ((D y) t) ((D z) t)))
```

Таким образом, композиция $L \circ \Gamma$ – функция от времени, возвращающая значение лагранжиана в точке на траектории[36]:

```
((compose (L-free-particle 'm) (Gamma q)) 't)
(+ (*1/2 m (expt ((D x) t) 2))
(*1/2 m (expt ((D y) t) 2))
(*1/2 m (expt ((D z) t) 2)))
```

Процедура `show-expression` упрощает выражение и использует TEX для отображения результата в традиционной математической форме. В этой книге мы применяли эту процедуру для написания формул, обведенных рамками.

Процедура `show-expression` умеет также выводить выражения в префиксной форме, но мы этого обычно не используем[37].

```
(show-expression
 ((compose (L-free-particle 'm) (Gamma q)) 't))
```

---

[34] Производная функции порождает функцию. Например, `((D cube ) 2) => 12` и в то же время `((D cube ) 'a) => (* 3 (expt a 2))`.

[35] Хотя Γ создает сколь угодно длинный локальный кортеж, наша процедура `Gamma` по умолчанию создает только первые три элемента. Если требуется более длинный локальный кортеж, в качестве дополнительного аргумента `Gamma` можно указать его длину.

[36] В нашей системе арифметические операторы могут применяться как к символьным выражениям, так и к числовым значениям; арифметические процедуры могут одинаково работать с числами или выражениями. Например, с помощью процедуры `(define ( cube x) (* x x x))` мы можем получить ее значение для числа `(cube 2) => 8` или для литерального символа `(cube 'a) => (* a a a)`.

[37] Для очень сложных выражений префиксная нотация Scheme бывает лучше, но упрощение почти всегда полезно. Мы можем разделить функции упрощения и инфиксного отображения. Примеры будут представлены ниже.

$$\frac{1}{2}m\left(Dx(t)\right)^2+\frac{1}{2}m\left(Dy(t)\right)^2+\frac{1}{2}m\left(Dz(t)\right)^2$$

В соответствии с формулой (1.4) мы можем вычислить действие Лагранжа на интервале времени от t_1 до t_2:

```
(define (Lagrangian-action L q t1 t2)
   (definite-integral (compose L (Gamma q)) t1 t2))
```

Процедура `Lagrangian-action` принимает в качестве аргументов процедуру вычисления лагранжиана L, процедуру расчета траектории `q`, а также начальный и конечный моменты времени `t1` и `t2`. Используемая здесь процедура `definite-integral` принимает в качестве аргументов интегрируемую функцию и два предела интегрирования `t1` и `t2` и вычисляет определенный интеграл этой функции в интервале от `t1` до `t2`[38]. Обратите внимание, что определение `Lagrangian-action` не зависит от какого-либо конкретного набора координат или даже размера конфигурационного пространства. Метод вычисления действия по лагранжиану в координатном представлении вдоль траектории в координатном пространстве не зависит от выбора системы координат.

Приведем теперь пример вычисления действия свободной частицы вдоль траектории. Например, рассмотрим частицу, движущуюся с постоянной скоростью по прямой $t \mapsto (4t + 7,\ 3t + 5,\ 2t + 1)$[39]. Определим траекторию с помощью процедуры:

```
(define (test-path t)
   (up (+ (* 4 t) 7)
       (+ (* 3 t) 5)
       (+ (* 2 t) 1)))
```

Задав для массы частицы конкретное значение 3, получаем действие в интервале между $t = 0$ и $t = 10$[40]:

```
(Lagrangian-action (L-free-particle 3.0) test path 0.0 10.0)
435.
```

Упражнение 1.4. Действие Лагранжа

Для свободной частицы лагранжиан имеет вид[41]:

---

[38] Scmutils включает множество процедур численного интегрирования. Примеры в этом разделе были вычислены методом экстраполяции формулы Эйлера–Маклорена на рациональные функции с относительной погрешностью 10^{-10}.

[39] Для реальной физической ситуации нам пришлось бы указать единицы измерения этих величин, но в данном случае мы оставляем их неопределенными.

[40] Здесь мы добавили десятичную точку при задании параметров. В результате соответствующая переменная объявлена как вещественная, что эффективно для численных расчетов. При решении задач символической алгебры важно, чтобы числа были точными целыми числами или рациональными дробями; тогда выражения можно надежно упростить до наименьшего числа членов. В этом случае числа указываются без десятичной точки.

[41] Квадрат величины скорости равен $\vec{v}\cdot\vec{v}$, скалярному произведению вектора скорости на себя, поэтому мы пишем просто $v^2 = v\cdot v$.

$$L(t, x, v) = \frac{1}{2} m v^2. \tag{1.8}$$

Предположим, что свободная частица движется с постоянной скоростью по прямолинейной траектории, и обозначим $x_a = x(t_a)$ и $x_b = x(t_b)$. Покажите, что действие на этом участке траектории равно

$$\frac{m}{2} \frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} m v^2. \tag{1.9}$$

Траектории минимального действия

Мы знаем, что фактическая траектория частицы, не подвергающейся действию сил, – равномерное движение по прямой. Согласно Эйлеру и Лагранжу, действие на прямолинейной траектории меньше, чем на любой другой близкой к ней траектории. Пусть q – прямолинейная траектория, действие на которой равно $S[q](t_1, t_2)$. Зададим $q + \varepsilon\eta$ – близлежащую траекторию, полученную из q прибавлением малой вариации η с масштабным вещественным параметром ε[42]. Действие на этой варьированной траектории равно $S[q + \varepsilon\eta](t_1, t_2)$. Эйлер и Лагранж доказали, что $S[q + \varepsilon\eta](t_1, t_2) > S[q](t_1, t_2)$ для любой вариации η, равной нулю в начальной и конечной точках траектории, и для любого ε.

Давайте проверим это в численном расчете, изменив траекторию прибавлением небольшой функции, принимающей нулевые значения в концевых точках $t = t_1$ и $t = t_2$. Чтобы гарантированно удовлетворить условию равенства функции нулю на границах интервала, мы можем определить функцию η как произведение: $\eta(t) = (t - t_1)(t - t_2)\nu(t)$. На компьютере это реализуется следующим образом:

```
(define ((make-eta nu t1 t2) t)
  (* (- t t1) (- t - t2) (nu t)))
```

Мы можем использовать эту процедуру для вычисления действия свободной частицы в зависимости от параметра ε[43] на траектории, варьированной относительно заданной:

```
(define  ((varied-free-particle-action mass nu t1 t2) eps)
   (let ((eta (make-eta nu t1 t2)))
```

---

[42] Обратите внимание, что мы выполняем арифметические операции над функциями. Мы расширяем определение арифметических операций таким образом, чтобы комбинация двух функций одного и того же типа (одни и те же переменные в одном и том же диапазоне) также была бы функцией тех же переменных, объединяющей значения аргументов функций в этом диапазоне. Например, если f и g – это некоторые функции t, то fg тоже является функцией $t \mapsto f(t)g(t)$. Умножение функции на константу означает, что в результате получается функция, каждое значение которой равно константе, умноженной на значение исходной функции для каждого аргумента: cf – это функция $t \mapsto cf(t)$.

[43] Обратите внимание, что мы фактически складываем процедуры. Аналогично описанному выше обобщению арифметических операций на функции, арифметические операции обобщаются и на совместимые процедуры.

```
    (Lagrangian-action (L-free-particle mass)
                       (+ q (* eps eta))
                        t1
                        t2)))
```

Приняв $v(t) = (\sin(t), \cos(t), t^2)$ и $\varepsilon = 0{,}001$, получаем на варьированной траектории величину действия большую, чем на исходной, как и следовало ожидать:

```
((varied-free-particle-action mass 3.0 test-pass
                                   (up sin cos square)
                                   (0.0, 10.0)
 0.001
436.29121428571153
```

Мы можем численно найти значение ε, при котором действие будет минимально. Производим поиск, скажем, в интервале между –2 и 1[44]:

```
(minimize
  ((varied-free-particle-action mass 3.0 test-pass
                                   (up sin cos square)
                                   (0.0, 10.0)
  -2.0 1.0)
(-1.5987211554602254e-14 435.0000000000237 5)
```

Итак, мы получаем именно то, что и ожидалось, – что лучшее значение ε равно нулю[45], а минимальное значение действия соответствует движению по прямой.

Расчет траекторий, минимизирующих действие

Мы использовали вариационный принцип, чтобы определить реализуемость данной траектории. Этот же принцип может быть использован и для самого расчета траектории. Если задан набор траекторий, описываемых конечным числом параметров, то мы можем произвести в пространстве этих параметров поиск такой траектории, которая наилучшим образом аппроксимирует реальной траектории. Для этого нужно найти траекторию, минимизирую-

---

[44] Аргументы процедуры `minimize` – процедура, реализующая рассматриваемую одномерную функцию, а также нижняя и верхняя границы области поиска. Scmutils включает в себя ряд методов численной минимизации; здесь используется алгоритм Брента с допуском 10^{-5}. Значение, возвращаемое процедурой `minimize`, представляет собой список из трех чисел: первое – значение аргумента, при котором найден минимум, второе – величина полученного минимума, третье – число итераций алгоритма минимизации, использованных для получения минимума.

[45] Да, $-1{,}5987211554602254\times10^{-14}$ с точностью до погрешности, допускаемой в численных расчетах, равно нулю. И 435,0000000000237 по аналогичным причинам совпадает с числом 435, полученным в аналитическом расчете. В этом примере все очевидно, но в более сложных случаях определение того, что является «нулем», при численных расчетах может быть весьма нетривиально и, во всяком случае, каждый раз требует индивидуального подхода.

щую действие. Выбрав хороший набор аппроксимирующих функций, мы сможем приблизиться к реальной траектории сколь угодно близко[46].

Простейший способ задать параметрическую траекторию с фиксированными концевыми точками – взять полином, проходящий через концевые, а также ряд промежуточных точек. Изменение положений промежуточных точек изменяет траекторию; параметрами полинома являются координаты этих точек. Процедура `make-path` строит такую траекторию с использованием интерполяционного полинома Лагранжа. Процедура `make-path` имеет пять аргументов: `(make-path t0 q0 t1 q1 qs)`, где `q0` и `q1` – начальная и конечная точки траектории, `t0` и `t1` – соответствующие им моменты времени, а `qs` – список промежуточных точек[47].

Задав траекторию набором параметров, мы можем построить параметрическое действие, которое является просто действием, вычисленным вдоль параметрической траектории:

```
(define ((parametric-path-action Lagrangian t0 q0 t1 q1 qs)
   (let ((path (make-path t0 q0 t1 q1 qs)))
      (Lagrangian-action Lagrangian path t0 t1)))
```

Приближенные траектории можно найти, определив параметры, минимизирующие действие. Мы выполним поиск экстремума с помощью встроенной процедуры многомерной минимизации[48]:

```
(define (find-path Lagrangian t0 q0 t1 q1 n)
  (let ((initial-qs (linear-interpolants q0 q1 n)))
```

[46] Существует множество хороших способов создать такой параметрический набор аппроксимирующих траекторий. Можно использовать сплайны или интерполирующие полиномы более высокого порядка, или полиномы Чебышева, или разложение в ряд Фурье. Выбор зависит от того, какую именно траекторию требуется аппроксимировать.

[47] Приведем возможную реализацию процедуры `make-path`:

```
(define (make-path t0 q0 t1 q1 qs)
    (let ((n (length qs)))
        (let ((ts (linear-interpolants t0 t1 n)))
              (Lagrange-interpolation-function
                 (append (list q0) qs (list q1))
                 (append (list t0) ts (list t1))))))
```

Процедура `linear-interpolants` создает список элементов, которые линейно интерполируют первые два аргумента. Мы используем эту процедуру, чтобы вычислить промежуточные моменты времени `ts`, равномерно распределенные между `t0` и `t1`, в которых будет задана траектория. Параметры `qs` являются положениями системы в эти моменты времени. Процедура `Lagrange-interpolation-function` принимает список значений и список моментов времени и вычисляет интерполяционный полином Лагранжа, проходящий через эти точки.

[48] Здесь используется симплексный метод спуска Нелдера–Мида. Как часто бывает в численных расчетах, интерфейс процедуры `nelder-mead` сложен, со множеством дополнительных параметров, позволяющих пользователю эффективно контролировать ошибки. Для этого примера мы специализировали `nelder-mead`, обернув ее более простой процедурой `multidimensional-minimize`. К сожалению, вам придется научиться жить со сложными численными процедурами.

```
  (let ((minimizing-qs
        (multidimensional-minimize
         (parametric-path-action Lagrangian t0 q0 t1 q1)
         initial-qs)))
    (make-path t0 q0 t1 q1 minimizing-qs))))
```

Процедура `multidimensional-minimize` в качестве аргумента принимает процедуру (в данном случае значение, возвращенное `parametric-path-action`), вычисляющую минимизируемую функцию (в данном случае действие), и начальное приближение для параметров. Здесь в качестве начального приближения мы используем вычисленные процедурой `linear-interpolants` точки, равномерно расположенные на отрезке между двумя концевыми точками.

Чтобы проиллюстрировать использование этого метода, вычислим траекторию гармонического осциллятора, лагранжиан которого имеет вид[49]:

$$L(t,q,v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kq^2, \tag{1.10}$$

где m – масса, а k – жесткость пружины. Этот лагранжиан реализуется процедурой[50]:

```
(define ((L-harmonic m k) local)
  (let ((q (coordinate local))
        (v (velocity local)) )
   (- (* 1/2 m (square v)) (* 1/2 k (square q)))))
```

Мы можем найти приближенную траекторию гармонического осциллятора при $m = 1$ и $k = 1$ в интервале между $q(0) = 1$ и $q(\pi/2) = 0$ с помощью следующего кода[51]:

```
(define q
  (find-path (L-harmonic 1.0 1.0) 0.0 1.0 :pi/2 0.0 3))
```

Известно аналитическое выражение для траекторий гармонического осциллятора с $m = 1$ и $k = 1$:

$$q(t) + A\cos(t + \varphi), \tag{1.11}$$

где амплитуда A и фаза φ определяются начальными условиями. Для выбранных нами конечных точек траектории решение равно $q(t) = \cos(t)$. Приближенная траектория должна быть достаточно близка к косинусу в диапазоне от 0 до $\pi/2$. На рис. 1.1 показана зависимость отклонения полиномиальной аппроксимации от аналитического решения, полученная в результате выполнения этого кода.

[49] Не беспокойтесь. Вы еще не знаете, почему это правильный лагранжиан, но мы разберем этот вопрос в разделе 1.6.

[50] Квадрат структуры компонентов определяется как сумма квадратов отдельных компонентов.

[51] По соглашению именованные константы имеют имена, начинающиеся с двоеточия. Константы с именами `:pi` и `: -pi` оказываются равны именно тому, что можно было бы ожидать, судя по их названию.

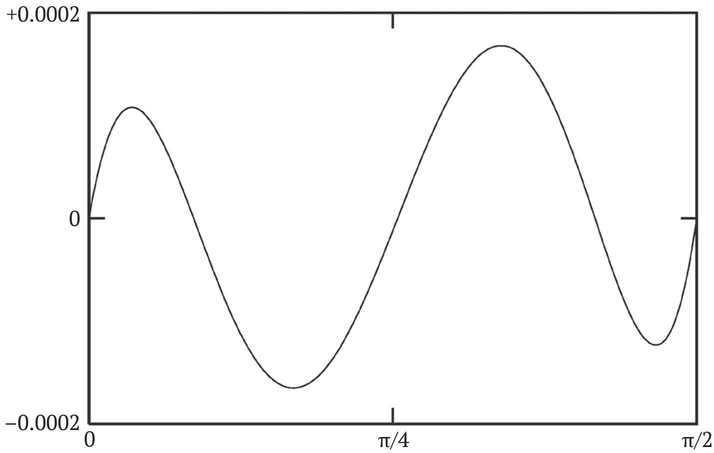

Рис. 1.1 ❖ Невязка (разница) между траекторией, рассчитанной полиномиальной аппроксимацией с минимальным действием, и фактической траекторией, определенной аналитическим решением для гармонического осциллятора. Абсцисса – время, ордината – величина невязки

Максимальная погрешность аппроксимации с тремя промежуточными точками составляет менее $1{,}7\times10^{-4}$. Как и ожидалось, ошибка аппроксимации уменьшается по мере увеличения числа промежуточных точек. Для четырех промежуточных точек максимальная погрешность будет примерно в 15 раз меньше.

Упражнение 1.5. Визуализация процесса минимизации

Мы можем наблюдать за ходом минимизации, добавив в процедуру `parametric-path-action` отображение траектории при каждом вычислении действия. Попробуйте:

```
(define win2 (frame 0.0 :pi/2 0.0 1.2))

(define ((parametric-path-action Lagrangian t0 q0 t1 q1)
         intermediate-qs)
    (let ((path (make-path t0 q0 t1 q1 intermediate-qs)))
      ;; отобразить траекторию
      (graphics-clear win2)
      (plot-function win2 path t0 t1 (/ (- t1 t0) 100))
      ;; вычислить действие
      (Lagrangian-action Lagrangian path t0 t1)))

(find-path (L-harmonic 1.0 1.0) 0.0 1.0 :pi/2 0.0 2)
```

Упражнение 1.6. Минимизация действия

Предположим, мы пытаемся получить траекторию методом минимизации действия для задачи, не имеющей решения. Предположим, к примеру, что механическая система описывается лагранжианом свободной частицы, но мы накладываем дополнительные граничные условия на скорость в конечной точке, или ограничения на положение частицы, несовместимые с предположением о том, что она свободна. Сможет ли наш формализм защитить себя от такой атаки? Было бы интересно запрограммировать такую задачу и посмотреть, что произойдет.

1.5. Уравнения Лагранжа–Эйлера

Согласно принципу наименьшего действия, реализуемые траектории механических систем в конфигурационном пространстве выделяются тем, что для них действие принимает стационарное значение. Из начального курса математического анализа мы помним, что критические точки функции – это точки, в которых производная обращается в нуль. Аналогично траектории, на которых величина действия стационарна, являются решениями системы дифференциальных уравнений. Эта система уравнений, называемая *уравнениями Эйлера–Лагранжа*, или просто *уравнениями Лагранжа*, является связующим звеном, которое позволяет нам использовать принцип наименьшего действия для расчета движения механических систем и связать воедино вариационную и ньютоновскую формулировки классической механики.

Уравнения Лагранжа

Легко показать, что если L – зависящий от времени, координат и скоростей лагранжиан системы и если q – траектория в координатном пространстве, для которой действие $S[q](t_1, t_2)$ стационарно (относительно любой малой вариации траектории, не изменяющей конечную и начальную точки), то:

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[q]) - \partial_1 L \circ \Gamma[q] = 0. \tag{1.12}$$

Здесь L – вещественная функция локального кортежа; $\partial_1 L$ и $\partial_2 L$ – частные производные лагранжиана по обобщенной координате и обобщенной скорости соответственно[52]. Функция $\partial_2 L$ отображает локальный кортеж в структуру, компоненты которой равны частным производным от L по каждой обобщенной скорости. Функция $\Gamma[q]$ отображает время в локальный кортеж: $\Gamma[q] = (t, q(t), Dq(t), \ldots)$. Таким образом, композиции $\partial_1 q\Gamma[q]$ и $\partial_2 q\Gamma[q]$ зависят только от одного аргумента – времени. Уравнения Лагранжа постулируют, что производная $\partial_2 q\Gamma[q]$ равна $\partial_1 q\Gamma[q]$ в любой момент времени. Для данного лагранжиана уравнения Лагранжа–Эйлера образуют систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которой должны удовлетворять реализуемые траектории.

[52] Производная или частная производная функции структурных переменных – это новая функция, зависящая от того же количества аргументов таких же типов. Область значений этой новой функции представляет собой структуру с тем же количеством компонентов, что и аргумент, по отношению к которому дифференцируется функция. См. главу 9, посвященную нотации, для получения дополнительной информации.

В традиционной формулировке уравнения Лагранжа записываются в виде отдельного уравнения для каждой составляющей q:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \qquad i = 0, \ldots, n-1.$$

При такой записи уравнений Лагранжа не проводится различие между L – вещественной функцией трех переменных $(t, q, \dot{q})$ и композицией $L \circ \Gamma[q]$ – вещественной функцией только одной вещественной переменной t. Стоит забыть об этом расхождении в нотации, как уравнения в такой форме становятся бессмысленными – $\partial L/\partial \dot{q}$ является функцией трех переменных, поэтому мы должны рассматривать аргументы q, $\dot{q}$ как функции от t, прежде чем применять к выражению дифференцирование d/dt. Аналогично $\partial L/\partial q$ – функция трех переменных, которые мы должны считать функциями t, прежде чем приравнивать $d/dt(\partial L/\partial \dot{q})$.

Корректное использование традиционной нотации придает математическую четкость уравнениям:

$$\frac{d}{dt}\left(\left.\frac{\partial L(t, w, \dot{w})}{\partial \dot{w}^i}\right|_{\substack{w = q(t) \\ \dot{w} = \frac{dq(t)}{dt}}} \right) - \left.\frac{\partial L(t, w, \dot{w})}{\partial w^i}\right|_{\substack{w = q(t) \\ \dot{w} = \frac{dq(t)}{dt}}} = 0,$$

где $i = 0, \ldots, n - 1$. Здесь мы берем частные производные лагранжиана, а затем заменяем траекторию и ее производную аргументами положения и скорости лагранжиана, в результате чего получаем выражение, зависящее только от времени.

1.5.1. Вывод уравнений Лагранжа

Мы покажем, что из принципа минимального действия следует, что реализуемая траектория системы удовлетворяет уравнениям Эйлера–Лагранжа.

Непосредственный вывод

Пусть q – реализуемая траектория от точки $(t_1, q(t_1))$ до точки $(t_2, q(t_2))$. Рассмотрим малую вариацию траектории $q + \varepsilon\eta$, где $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$. Положим

$$g(\varepsilon) = S(q + \varepsilon\eta)(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q(t) + \varepsilon\eta(t), Dq(t) + \varepsilon D\eta(t))dt. \tag{1.13}$$

Представим $g(\varepsilon)$ в виде степенного ряда по степеням ε:

$$g(\varepsilon) = g(0) + \varepsilon Dg(0) + \cdots. \tag{1.14}$$

По правилу дифференцирования сложной функции имеем:

$$Dg(0) = \int_{t_1}^{t_2} \big(\partial_1 L(t, q(t), Dq(t)\big)\eta(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} \big(\partial_2 L(t, q(t), Dq(t)\big) D\eta(t)dt. \tag{1.15}$$

Интегрируя второй член по частям, получаем:

$$Dg(0) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\partial_1 L(t, q(t), Dq(t)\right)\eta(t)dt +$$

$$+ \partial_2 L(t, q(t), Dq(t)D\eta(t))\eta(t)\Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\partial_2 L(t, q(t), Dq(t))\right)\eta(t)\,dt. \qquad (1.16)$$

С точностью до членов первого порядка по ε приращение действия ΔS из-за вариации траектории составляет $\varepsilon Dg(0)$. Поскольку η равно нулю в концевых точках, второй член в выражении равен нулю. Собирая вместе два других члена и возвращаясь к функциональной нотации, находим, что приращение равно:

$$\Delta S = \varepsilon \int_{t_1}^{t_2} \left\{\partial_1 L \circ \Gamma[q] - D(\partial_2 L \circ \Gamma[q])\right\}\eta. \qquad (1.17)$$

Если ΔS равно нулю, то действие стационарно. Мы абсолютно свободны в выборе вариации η, поэтому коэффициент при η в подынтегральном выражении должен быть равен нулю в любой точке траектории. Предположим противное: пусть этот коэффициент не равен нулю в какой-то момент времени t', принадлежащий интервалу (t_1, t_2). В этом случае будет отличен от нуля по крайней мере один из его компонентов. Но если мы выберем вариацию η таким образом, что она была отлична от нуля только в этом компоненте в малой окрестности этого момента времени и равна нулю во всех остальных точках, то интеграл не будет равен нулю. Таким образом, можно заключить, что коэффициент в фигурных скобках под интегралом в (1.17) тождественно равен нулю, и, таким образом, мы получаем уравнения Лагранжа[53]:

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[q]) - \partial_1 L \circ \Gamma[q] = 0. \qquad (1.18)$$

Вариационный оператор

Мы начнем с разработки математических инструментов для исследования того, как функции, зависящие от траекторий, изменяются при варьировании последних. Затем применим эти инструменты к действию, чтобы вывести уравнения Лагранжа.

Предположим, что имеется функция $f[q]$, зависящая от траектории q. Как она изменяется при варьировании траектории? Пусть q – траектория в координатном пространстве, а $q + \varepsilon\eta$ – вариация траектории, где η – функция, которая прибавляется к траектории q, а ε – масштабный коэффициент. Мы определяем *вариацию* $\delta_\eta f[q]$ функции f, определенной на траектории q, следующим образом[54]:

[53] Чтобы сделать этот аргумент более точным, требуется тщательный анализ.

[54] Вариационный оператор δ_n аналогичен оператору производной в том смысле, что он непосредственно действует на следующую за ним функцию: $\delta_\eta f[q] = (\delta_\eta f)[q]$.

$$\delta_\eta f[q] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{f[q+\varepsilon\eta]-f[q]}{\varepsilon}\right). \tag{1.19}$$

Вариация f является линейной аппроксимацией первого относительно изменения функции f при малых вариациях траектории. Вариация f зависит от η.

Рассмотрим простейший пример: тождественную функцию траектории, $I[q] = q$. По определению, получаем:

$$\delta_\eta I[q] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{(q+\varepsilon\eta)-q}{\varepsilon}\right) = \eta. \tag{1.20}$$

Традиционно $\delta_\eta I[q]$ записывается как δq. Другой пример – вариации функции траектории, которая возвращает производную от этой траектории. Имеем[55]:

$$\delta_\eta g[q] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{D(q+\varepsilon\eta)-Dq}{\varepsilon}\right) = D\eta, \text{ где } g[q] = Dq. \tag{1.21}$$

Традиционно $\delta_\eta g[q]$ записывается как δDq.

Вариацию можно выразить через производные функции. Пусть $g(\varepsilon) = f[q + \varepsilon\eta]$, тогда:

$$\delta_\eta f[q] = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{g(\varepsilon)-g(0)}{\varepsilon}\right) = Dg(0). \tag{1.22}$$

Свойства вариаций похожи на свойства производных. Для двух зависящих от траекторий функций f и g и постоянной C верно следующее:

$$\delta_\eta(f \cdot g)[q] = \delta_\eta f[q] \cdot g[q] + f[q] \cdot \delta_\eta g[q]; \tag{1.23}$$

$$\delta_\eta(f + g)[q] = \delta_\eta f[q] + \delta_\eta g[q]; \tag{1.24}$$

$$\delta_\eta(C \cdot f)[q] = C\delta_\eta f[q]. \tag{1.25}$$

Пусть F – не зависящая от траектории q функция, а g зависит от траектории, тогда:

$$\delta_\eta h[q] = (Df \circ g[q])\delta_\eta g[q], \text{ где } h[q] = F \circ g[q]. \tag{1.26}$$

Оператор дифференцирования D и вариационный оператор δ коммутируют в следующем смысле:

$$D\delta_\eta f[q] = \delta_\eta g[q], \text{ где } g[q] = D(f[q]). \tag{1.27}$$

Аналогично вариационный оператор коммутирует с оператором интегрирования.

Если f – зависящая от траектории функция, стационарная для конкретной траектории q относительно ее малых изменений, то она должна быть стацио-

[55] Мы не можем подставить Dq вместо $g[q]$ в $\delta_\eta g[q]$, потому что δ_n относится к g, а не к $g[q]$.

нарна и для подмножества тех вариаций, которые возникают в результате прибавления небольших кратных некоторой функции η к q. Таким образом, утверждение $\delta_\eta f[q] = 0$ для произвольной η подразумевает, что функция f стационарна для малых вариаций траектории в окрестности q.

Упражнение 1.7. Свойства вариационного оператора δ

Покажите, что δ обладает свойствами 1.23–1.27.

Упражнение 1.8. Реализация δ

a. Предположим, что имеется процедура `f`, реализующая функцию, зависящую от траектории: для траектории `q` и времени `t` она возвращает значение `((f q) t)`. Процедура `delta` вычисляет вариацию $|\delta_\eta f|[q](t)$ как значение выражения `((((delta eta) f) q) t`. Завершите определение `delta`:

```
(define (((delta eta) f) q)
  ...
  )
```

b. Примените написанную вами процедуру `delta`, проверяющую свойства вариационного оператора δ из упражнения 1.7, к простым функциям, например реализованной следующей процедурой `f`[56]:

```
(define (f q)
  (compose
    (literal-function 'F
                      (-> (UP Real (UP* Real ) (UP* Real)) Real))
    (Gamma q)))
```

Эта процедура реализует зависящую от траектории функцию с n степенями свободы, которая зависит от локального кортежа траектории в любой момент времени. Литеральную траекторию в двумерном пространстве можно определить в виде процедуры:

```
(define q (literal-function 'q (-> Real (UP Real Real))))
```

В выражениях 1.23–1.27 требуется вычислить обе части равенств и сравнить результаты – они должны совпасть.

Вывод уравнений Лагранжа с помощью вариационного оператора

Действие – это интеграл лагранжиана по траектории:

$$S[q](t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} L \circ \Gamma[q]. \tag{1.28}$$

---

[56] Тип символьной функции задается ее описанием. По умолчанию тип функции определяется как `(-> Real Real)`, то есть это вещественная функция вещественного аргумента. В данном случае `F` объявляется как функция, имеющая вид лагранжиана с неопределенным числом степеней свободы. Для получения дополнительной информации о сигнатурах функций см. главу 9.

Для любой реализуемой траектории q вариация действия относительно любой вариации η, сохраняющей концевые точки, $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, равна нулю:

$$\delta_\eta D[q](t_1, t_2) = 0. \tag{1.29}$$

Поскольку вариационный оператор коммутирует с интегрированием, вариация действия равна:

$$\delta_\eta S[q](t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \delta_\eta h[q], \text{ где } h[q] = L \circ \Gamma[q]. \tag{1.30}$$

Пользуясь тем фактом, что

$$\delta_\eta \Gamma[q](t) = (0, \eta(t), D(\eta(t)), \tag{1.31}$$

что следует из уравнений (1.20) и (1.21), и применяя правило дифференцирования сложной функции для вариаций (1.26), получаем[57]:

$$\begin{aligned}\delta_\eta S[q](t_1, t_2) &= \int_{t_1}^{t_2} (DL \circ \Gamma[q])\delta_\eta \Gamma[q] \\ &= \int_{t_1}^{t_2} ((\partial_1 L \circ \Gamma[q])\eta + (\partial_2 L \circ \Gamma[q])D\eta).\end{aligned} \tag{1.32}$$

Интегрируя последний член уравнения (1.32) по частям, получаем:

$$\delta_\eta S[q](t_1, t_2) = (\partial_2 L \circ \Gamma[q])\eta\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left\{(\partial_1 L \circ \Gamma[q]) - D(\partial_2 L \circ \Gamma[q])\right\}\eta. \tag{1.33}$$

Вариация траектории η удовлетворяет условию $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$, таким образом, первый член равен нулю.

Таким образом, вариация действия равна нулю тогда и только тогда, когда

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{(\partial_1 L \circ \Gamma[q]) - D(\partial_2 L \circ \Gamma[q])\right\}\eta = 0. \tag{1.34}$$

Вариация действия равна нулю, потому что по нашему предположению q – реализуемая траектория системы. Таким образом, уравнение (1.34) должно выполняться для любой функции η, которая равна нулю в конечных точках траектории. Поскольку η является произвольной функцией, за исключением того, что она принимает нулевые значения в концевых точках, коэффициент в фигурных скобках в подынтегральном выражении равен нулю, то есть:

---

[57] Функция нескольких аргументов рассматривается как функция верхнего кортежа своих аргументов. Таким образом, производная функции нескольких аргументов является нижним кортежем частных производных этой функции по каждому из аргументов. Так что в случае лагранжиана L имеем:

$DL(t, q, v) = [\partial_0 L(t, q, v), \partial_1 L(t, q, v), \partial_2 L(t, q, v)].$

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[q]) - (\partial_1 L \circ \Gamma[q]) = 0. \qquad (1.35)$$

Это как раз то, что мы намеревались получить, – уравнения Лагранжа.

Траектория, удовлетворяющая уравнениям Лагранжа, – это траектория, для которой действие стационарно, а тот факт, что действие является стационарным, зависит только от значений L в каждой точке траектории (и в каждой точке на соседних траекториях), а не от системы координат, которую мы используем для вычисления этих значений. Следовательно, если траектория системы удовлетворяет уравнениям Лагранжа в какой-либо конкретной системе координат, то она должна удовлетворять уравнениям Лагранжа и в *любой* системе координат. Таким образом, уравнения вариационной механики выводятся одинаково в любом конфигурационном пространстве и в любой системе координат.

Гармонический осциллятор

Для примера рассмотрим гармонический осциллятор. Лагранжиан системы имеет вид:

$$L(t, x, v) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}kx^2. \qquad (1.36)$$

Тогда

$$\partial_1 L(t, x, v) = -kx \text{ и } \partial_2 L(t, x, v) = mv. \qquad (1.37)$$

Оператор лагранжиана действует на кортеж времени, координаты и скорости. Символы t, x и v выбраны произвольно; они используются для указания формальных параметров лагранжиана.

Теперь предположим, что имеется траектория y в конфигурационном пространстве, которая определяет координату осциллятора $y(t)$ в каждый момент времени t. Начальный сегмент соответствующего локального кортежа в момент времени t равен:

$$\Gamma[y](t) = (t, y(t), Dy(t)). \qquad (1.38)$$

Итак,

$$(\partial_1 L \circ \Gamma[y])(t) = -ky(t) \text{ и } (\partial_2 L \circ \Gamma[y])(t) = mDy(t) \qquad (1.39)$$

и

$$D(\partial_2 L \circ \Gamma[y])(t) = mD^2 y(t). \qquad (1.40)$$

Поэтому уравнение Лагранжа имеет вид:

$$mD^2 y(t) + ky(t) = 0, \qquad (1.41)$$

что совпадает с уравнением движения гармонического осциллятора.