

УДК 519.21  
ББК 22.171  
Т19

Тарасов В. А.

**Т19** Стереометрия: скрещивающиеся прямые. Теория, задачи и методы их решения. – М.: ДМК Пресс, 2024. – 208 с.: ил.

**ISBN 978-5-93700-198-6**

Книга посвящена задачам на скрещивающиеся прямые и методам их решения. Эти задачи традиционно относят к сложным задачам стереометрии. Адресована абитуриентам, школьникам, учителям, всем любителям математики.

Имеет цель *помочь* читателю выработать или закрепить устойчивые навыки и умения для решения задач, в которых присутствует тема «Скрещивающиеся прямые»; повторить или изучить курс «Стереометрия»; подготовиться к любым экзаменам, в том числе к Единому государственному экзамену (ЕГЭ) по математике.

Для достижения поставленной цели книга содержит необходимый набор основных опорных фактов, теорем и методов решения задач на скрещивающиеся прямые.

*Специфика* данной работы заключается именно в выделении и описании совокупности *основных методов решения типовых задач* на скрещивающиеся прямые в *наиболее распространенных геометрических конструкциях*, что дает ключи к решению многих экзаменационных задач средней и повышенной сложности.

Все права защищены. Любая часть этой книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Материал, изложенный в данной книге, многократно проверен. Но, поскольку вероятность технических ошибок все равно существует, издательство не может гарантировать абсолютную точность и правильность приводимых сведений. В связи с этим издательство не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги.

ISBN 978-5-93700-198-6

© Тарасов В. А., 2024  
© Издание, оформление, ДМК Пресс, 2024

# Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>5</b>
<b>Глава 1. Основные опорные факты, типовые задачи и общие схемы их решения.....</b>	<b>7</b>
1.1. Определение и опорные факты .....	7
1.2. Две типовые задачи, общие схемы их решения .....	10
1.3. Выводы.....	15
<b>Глава 2. Основные методы решения задач на скрещивающиеся прямые .....</b>	<b>17</b>
2.1. Метод параллельной плоскости.....	17
2.2. Метод перпендикулярной плоскости .....	19
2.3. Примеры применения методов параллельной и перпендикулярной плоскостей .....	23
2.4. Взаимосвязь методов параллельных и перпендикулярных плоскостей, основных элементов, сопутствующих скрещивающимся прямым .....	33
2.5. Метод вспомогательного объема.....	35
2.6. Пример применения метода вспомогательного объема .....	36
2.7. Векторный метод .....	38
2.8. Пример применения векторного метода.....	41
2.9. Координатный метод.....	45
2.10. Пример применения координатного метода.....	52
2.11. Метод описанного параллелепипеда.....	57
2.12. Пример применения метода описанного параллелепипеда .....	61
2.13. Выводы.....	63
<b>Глава 3. Основные методы в правильных геометрических фигурах .....</b>	<b>64</b>
3.1. Правильная треугольная пирамида.....	64
3.2. Правильная четырехугольная пирамида .....	76
3.3. Куб .....	81
3.4. Правильная четырехугольная призма.....	83
3.5. Выводы.....	86

<b>Глава 4. Решение задач повышенной сложности несколькими методами</b> .....	87
4.1. Основные методы в задаче на призму .....	87
4.2. Основные методы в задаче на пирамиду .....	97
4.3. Выводы .....	107
<b>Глава 5. Задачи на скрещивающиеся прямые в треугольной пирамиде</b> .....	108
5.1. Сечения пирамиды плоскостью, параллельной противоположным ребрам .....	108
5.2. Перпендикулярность противоположных ребер и пересечение высот пирамиды .....	117
5.3. Выводы .....	132
<b>Глава 6. Применение основных методов в задачах по подготовке к ЕГЭ по математике</b> .....	134
6.1. Задачи на круглые тела .....	134
6.2. Задача на тетраэдр с перпендикулярным основанием боковым ребром .....	138
6.3. Задача на сечение тетраэдра плоскостью, параллельной его противоположным ребрам. ....	140
6.4. Задача на треугольную призму .....	143
6.5. Выводы .....	145
<b>Глава 7. Избранные задачи на скрещивающиеся прямые</b> .....	146
7.1. Задачи на треугольную призму (правильную и наклонную) .....	146
7.2. Задачи на треугольную пирамиду .....	161
7.3. Задачи с «нестандартным» заданием правильной треугольной пирамиды .....	178
7.4. Скрещивающиеся прямые в пространстве .....	183
7.5. Дополнительная формула для объема треугольной пирамиды .....	193
7.6. Пример экзаменационной задачи .....	196
7.7. Выводы .....	200
<b>Глава 8. Задачи для самостоятельного решения</b> .....	201
Ответы .....	203
<b>Заключение</b> .....	205
<b>Литература</b> .....	206

# Введение

Издание посвящено решению задач, в которых присутствует тема «Скрещивающиеся прямые», и методам их решения. Эти задачи традиционно относят к одним из наиболее сложных задач стереометрии. Причина, видимо, заключается в отсутствии прямого аналога скрещивающимся прямым на плоскости в отличие от многих других объектов стереометрии. Например, аналогами треугольной пирамиды, сферы являются треугольник и окружность соответственно.

В *первой главе* приводятся основные опорные факты, описывающие геометрию скрещивающихся прямых; выделяются две типовые задачи – нахождение 1) угла и 2) расстояния между скрещивающимися прямыми, построение их общего перпендикуляра; сопутствующие задачи.

*Вторая глава* является *центральной*. В ней описаны основные методы решения типовых задач на скрещивающиеся прямые, приведены примеры применения каждого метода.

Остальные главы – это последовательное решение задач различной сложности с помощью основных методов, их дальнейшее изучение и применение в наиболее распространенных геометрических конструкциях. Здесь описано:

- решение задач для правильных геометрических фигур (третья глава);
- решение задач повышенной сложности сразу несколькими методами (четвертая глава);
- решение задач на скрещивающиеся прямые в треугольной пирамиде (пятая глава);
- решение задач из материалов по подготовке к ЕГЭ по математике (шестая глава);
- решение избранных задач повышенной сложности (глава 7);
- приведен список задач для самостоятельного решения (с ответами) (глава 8).

В заключение констатируется эффективность изложенных методов, целесообразность их изучения и применения при повторении или изучении курса «Стереометрия», при подготовке к любым экзаменам, в том числе при подготовке к ЕГЭ по математике.

*Специфика* книги заключается в том, что в ней для скрещивающихся прямых:

- воедино собраны *основные опорные свойства, типовые задачи, набор основных методов их решения*;
- задачи и методы их решения изучены для наиболее *распространенных геометрических конструкций*;
- продемонстрированы *применение и эффективность методов* путем решения достаточного количества задач различной сложности.

Для удобства чтения нумерация рисунков и задач иногда начинается заново с началом главы.

Формулировки задач в основном отобраны из популярных изданий [1–20]. Иногда они незначительно изменены в целях более наглядной демонстрации методов и их возможностей; например, к требованию найти угол между скрещивающимися прямыми добавляется требование найти расстояние и общий перпендикуляр между ними.

# Глава 1.

## Основные опорные факты, типовые задачи и общие схемы их решения

### 1.1. Определение и опорные факты

#### 1.1.1. Определение

Скрещивающимися называются прямые  $a$  и  $b$ , не лежащие в одной плоскости (рис. 1).

Для краткости их иногда обозначают символом  $a \& b$ .

#### 1.1.2. Признак скрещивающихся прямых

Если прямая  $a$  лежит в плоскости  $\alpha$ , а прямая  $b$  пересекает ее в точке  $B$ , не принадлежащей прямой  $a$ , то прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются (рис. 1).

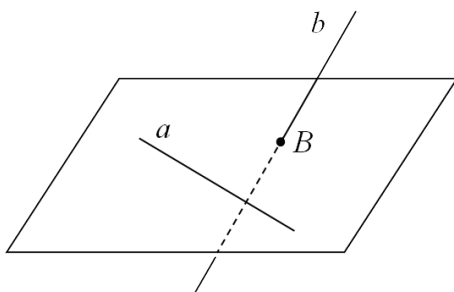


Рис. 1

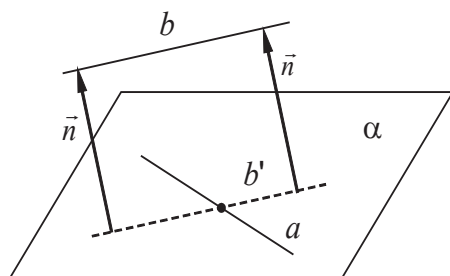


Рис. 2

Рисунок 2 показывает один из очевидных способов получения пары скрещивающихся прямых  $a \& b$  из двух пересекающихся прямых  $a$  и  $b'$ ; прямая  $b$  получена параллельным переносом прямой  $b'$  на некоторый вектор  $\vec{n}$ , не параллельный плоскости  $\alpha$ .

Так полученные прямые  $a$  и  $b$  наглядно иллюстрируют важное опорное свойство (теорему).

### 1.1.3. Теорема

**Если прямые  $a$  и  $b$  скрещиваются, то через прямую  $a$  можно провести единственную плоскость  $\alpha$ , параллельную прямой  $b$  (рис. 3).**

Способ получения плоскости  $\alpha$  очевиден. Достаточно через любую точку  $O$  прямой  $a$  провести прямую  $b' \parallel b$ .

Через пересекающиеся прямые  $a$  и  $b'$  проходит единственная искомая плоскость  $\alpha$ . Действительно, так как  $b \parallel b'$ ,  $b' \subset \alpha$ , то  $b \parallel \alpha$  по признаку параллельности прямой и плоскости. Единственность плоскости  $\alpha$  докажете самостоятельно (по любому из учебников).

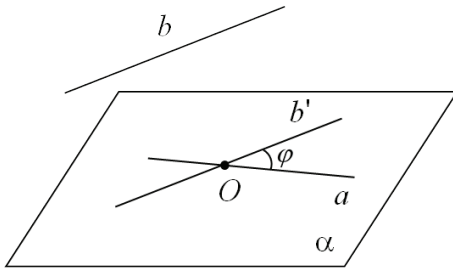


Рис. 3

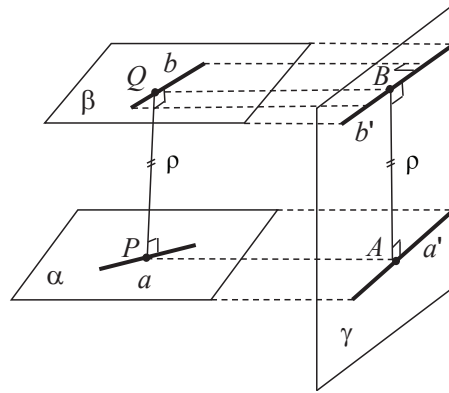


Рис. 4

Угол  $\varphi$  между пересекающимися прямыми  $a$  и  $b'$ , где  $b' \parallel b$ , называется *углом между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$* :

$$\varphi = \varphi(a, b) = \varphi(a, b').$$

Он не зависит от выбора точки  $O$ .

Аналогично, через прямую  $b$  можно провести единственную плоскость  $\beta$ , параллельную прямой  $a$ .

Получаем *фундаментальное опорное свойство*, характеризующее геометрию скрещивающихся прямых:

#### 1.1.4.

**Паре скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  соответствует единственная пара параллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ , проходящих через прямые  $a$  и  $b$  соответственно (рис. 4):**

$$a \subset \alpha, \quad b \subset \beta, \quad \alpha \parallel \beta.$$

Опорные свойства 1.1.3, 1.1.4 лежат в основе методов параллельной плоскости и описанного параллелепипеда.

Существенную роль, как увидим, играет плоскость  $\gamma$ , перпендикулярная к плоскости  $\alpha$  (а значит, и к плоскости  $\beta$ ).

*Комментарий.* Пару скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  (по определению) нельзя разместить в одной плоскости, но можно разместить в единственной паре параллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$ .

### 1.1.5.

Параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  проектируются на перпендикулярную им плоскость  $\gamma$  в параллельные прямые  $a'$  и  $b'$  соответственно, рис. 4.

Важен частный случай, когда плоскость  $\gamma$  перпендикулярна одной из скрещивающихся прямых, например прямой  $a$  (рис. 5).

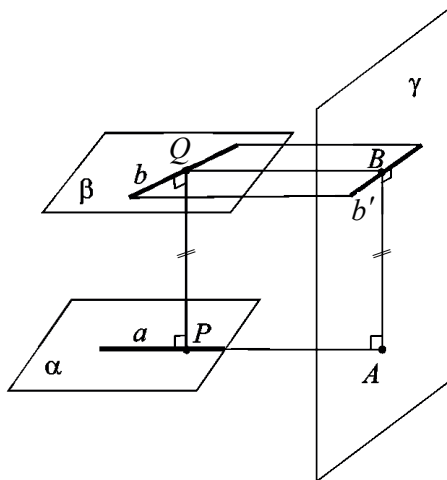


Рис. 5

Здесь справедливо следующее опорное свойство:

### 1.1.6.

Если плоскость  $\gamma$  перпендикулярна прямой  $a$ , то проекция-ми скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  на плоскость  $\gamma$  являются точка  $A$  и прямая  $b'$  соответственно.



Подчеркнем: если одна из скрещивающихся прямых перпендикулярна плоскости  $\gamma$  (например,  $a \perp \gamma$ ), то вторая прямая не перпендикулярна ей.

Иначе (при  $a \perp \gamma$  и  $b \perp \gamma$ ) прямые  $a$  и  $b$  были бы параллельными, а не скрещивающимися.

Значит, если одна из скрещивающихся прямых проектируется на плоскость  $\gamma$  в точку, то другая – в прямую. Именно это и утверждается в свойстве 1.1.6.

Опорные свойства 1.1.5, 1.1.6 лежат в основе метода *перпендикулярной плоскости*.

Упомянутые методы (подробно описаны ниже) решают две известные типовые задачи на скрещивающиеся прямые. Напомним их.

## 1.2. Две типовые задачи, общие схемы их решения

### 1.2.1. Первая задача. Построить и вычислить угол $\varphi$ между скрещивающимися прямыми $a$ и $b$

Обозначение:  $\varphi = \angle(a, b) = (\hat{a}; \hat{b}) = \varphi(a, b)$ .

Изложим идею одного из методов ее решения в п. 1.2.2.

### 1.2.2. Метод параллельной плоскости (проектирования на параллельную плоскость)

Надо:

1. Выбрать удобную для конкретной решаемой задачи точку  $O$  (или  $P$ ) – вершину искомого угла. Она может лежать, например, на одной из прямых  $a$  или  $b$ .
2. Через эту точку провести прямые  $a'$  и  $b'$ , параллельные прямым  $a$ ,  $b$  соответственно (рис. 3; 7)

$$a' \parallel a, b' \parallel b.$$

Угол, образованный пересекающимися прямыми  $a'$  и  $b'$ , равен искомому углу между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ .

3. Найти величину угла  $\varphi$  между прямыми  $a'$ ,  $b'$ , используя исходные данные конкретной задачи:

$$\varphi = \varphi(a', b') = \varphi(a, b).$$

4. Выписать ответ.

Метод параллельной плоскости, или метод проектирования на параллельную плоскость, как видим, основан на существовании плоскости  $\alpha$ , проходящей через одну из скрещивающихся прямых параллельно другой прямой (опорное свойство 1.1.3), или плоскости, параллельной обеим скрещивающимся прямым.

### 1.2.3. Вторая задача

- а) Построить отрезок  $PQ$  с концами на скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ , перпендикулярный этим прямым (рис. 4, 5).

$$P \in a, \quad Q \in b, \quad PQ \perp a, \quad PQ \perp b.$$

- б) Найти расстояние  $\rho$  между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ :

$$\rho = \rho(a, b) = PQ.$$

Теоретическую базу для данной задачи и схему решения дает *доказательство* следующей *теоремы*.

**Теорема.** Для двух скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  существует **единственный отрезок:**

- **который перпендикулярен каждой из них и**
- **концы которого расположены на этих прямых.**

Длину  $\rho$  этого отрезка  $PQ$  называют *расстоянием* между прямыми  $a$  и  $b$ .

Нахождение этого расстояния и построение самого отрезка  $PQ$  составляют суть второй задачи.

### 1.2.4. Схема построения общего перпендикуляра $PQ$ к скрещивающимся прямым $a$ и $b$

1. Провести две параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , проходящие через прямые  $a$  и  $b$  соответственно ( $a \subset \alpha, b \subset \beta$ ). Такая пара плоскостей существует и единственна (свойство 1.1.4 скрещивающихся прямых).
2. Спроектировать прямую  $b$  на плоскость  $\alpha$  и получить на ней прямую  $b'$  – проекцию прямой  $b$  (рис. 6).
3. Через точку  $P$  пересечения прямых  $a$  и  $b'$  в плоскости проекции  $\gamma = \gamma(b; b')$  провести перпендикуляр  $PQ$  к прямой  $b'$ . Здесь  $Q$  – точка пересечения этого перпендикуляра и прямой  $b$ .

4. Полученный так отрезок  $PQ$  есть искомый общий перпендикуляр к скрещивающимся прямым  $a$  и  $b$ .

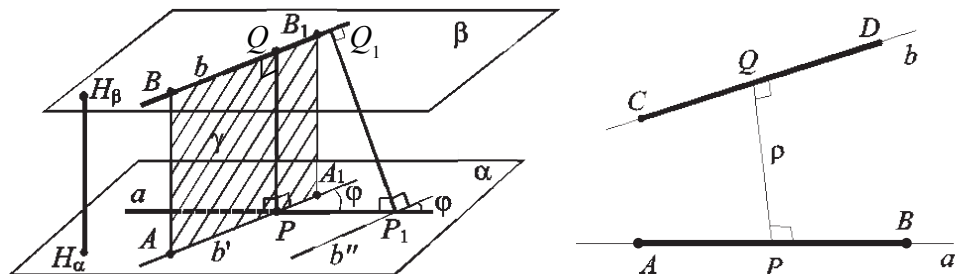


Рис. 6

### 1.2.5. Обоснование схемы, комментарии

Обсудим и обоснуем каждый пункт схемы; приведем необходимые доказательства, полезные далее при решении задач.

1. Проведение пары параллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  для скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$  возможно в соответствии с опорным свойством 1.1.4.

Важно, что *расстояние между прямыми  $a$  и  $b$  равно расстоянию между плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ :*

$$\rho = \rho(a, b) = \rho(\alpha, \beta).$$

Для получения проекции  $b'$  прямой  $b$  достаточно из двух точек  $B$  и  $B_1$  прямой  $b$  опустить перпендикуляры  $BA$  и  $B_1A_1$  на плоскость  $\alpha$ . Плоскость проекции  $ABB_1A_1$  (назовем ее  $\gamma$ ):

- перпендикулярна к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ , так как проходит через перпендикуляр  $AB$  к ним;
- рассечет плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  по параллельным прямым, т. е.  $b \parallel b'$ .

Прямые  $a$  и  $b'$  пересекаются:  $a \cap b' = P$ , и точка  $P$  их пересечения существует (иначе не были бы скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ : если  $a \parallel b'$ , то  $a \parallel b$ , так как  $b' \parallel b$ ).

2. Перпендикуляр  $PQ$  проведён в плоскости  $\gamma$  (плоскости проекции) к линии  $b'$  пересечения ее с перпендикулярной плоскостью  $\alpha$  ( $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$ ).

Значит, отрезок  $PQ$  перпендикулярен плоскости  $\alpha$  и прямой  $a$ , лежащей в ней:

$$\begin{cases} PQ \perp b'; \\ b' = \gamma \cap \alpha; \\ \gamma \perp \alpha; \end{cases} \Rightarrow PQ \perp \alpha \Rightarrow PQ \perp a, \text{ так как } a \subset \alpha.$$

Итак:

$$\begin{cases} PQ \perp b' \text{ и } PQ \perp b, \text{ так как } b' \parallel b; \\ PQ \perp a, \end{cases}$$

т. е. отрезок  $PQ$  – общий перпендикуляр к прямым  $a, b$ . Заметим, что он перпендикулярен плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ .

3. Его *единственность* доказывают методом от противного. Предположим существование иного общего перпендикуляра, например  $P_1Q_1$  (рис. 6). Он, как и отрезок  $PQ$ , перпендикулярен к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$ .

Два перпендикуляра  $PQ$  и  $P_1Q_1$  к плоскости  $\alpha$  параллельны ( $PQ \parallel P_1Q_1$ ), значит, лежат в одной плоскости  $PQQ_1P_1$ . В этой же плоскости лежат и скрещивающиеся прямые  $QQ_1 = b; PP_1 = a$ , что невозможно. Противоречие.

Здесь концы отрезков  $PQ$  и  $P_1Q_1$  не совпадали, образовывали прямые  $QQ_1$  и  $PP_1$ .

Случай совпадения пары концов (например, когда  $P = P_1$ ) невозможен: ведь из точки  $P$  можно провести лишь один перпендикуляр к плоскости  $\alpha$ .

Итак:

- доказаны существование и единственность общего перпендикуляра  $PQ$  к скрещивающимся прямым  $a$  и  $b$  (это, по существу, доказательство самой теоремы);
- обоснована схема его построения, осталось найти его длину.

### 1.2.6. Нахождение расстояния $\rho$ между прямыми $a, b$ или длины их общего перпендикуляра

Это возможно несколькими методами, которые подробно изложены ниже и составляют центральную часть данной работы. Здесь же отметим следующее.

В некоторых (относительно простых) задачах удобно и построить общий перпендикуляр, и найти его длину  $\rho$  *непосредственно*.

Однако в большинстве задач удобнее и эффективнее иные методы. Дадим пока общее описание, идею некоторых из них.

1) *Метод параллельных плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$*  (рис. 6).

Его суть и преимущество: достаточно найти расстояние между параллельными плоскостями  $\alpha$  и  $\beta$ , так как оно равно расстоянию между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ :

$$\rho(a, b) = PQ = \rho(\alpha, \beta) = H_\alpha H_\beta = AB = A_1 B_1.$$

На всей плоскости  $\alpha$  найти удобную для этого точку  $H_\alpha$  легче, чем найти единственную точку  $P$  на прямой  $a$ .

Сами эти плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  строятся довольно просто, о чем свидетельствует опорное свойство 1.1.3 скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Часто бывает достаточно построить лишь одну плоскость и использовать.

2) *Метод параллельной плоскости  $\alpha$  к прямой  $b$* .

Его суть и преимущество: достаточно найти расстояние между прямой  $b$  и плоскостью  $\alpha$  (рис. 6); оно равно расстоянию между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ .

На всей прямой  $b$  легче найти подходящую точку, например точку  $B$ , чем искать единственную точку  $Q \in b$ :

$$\rho(a, b) = PQ = \rho(\alpha, b) = AB = A_1 B_1.$$

Этот метод – частный случай предыдущего. Далее они носят общее название «метод параллельной плоскости».

3) *Метод перпендикулярной плоскости  $\gamma$  к плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$*  (рис. 4).

Его суть:

- спроектировать плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  на перпендикулярную им плоскость  $\gamma$  и получить на ней параллельные прямые  $a'$  и  $b'$  – проекции плоскостей  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;
- в плоскости  $\gamma$  найти расстояние между параллельными прямыми  $a'$  и  $b'$ :

$$\rho = \rho(a', b').$$

Преимущество: пространственная задача заменена планиметрической задачей в плоскости  $\gamma$ .

Однако плоскость  $\gamma$  следует еще построить, но, как правило, это легче построения общего перпендикуляра  $PQ$ .

4) *Метод перпендикулярной плоскости  $\gamma$  к прямой  $a$*  (рис. 5).

Здесь прямая  $a$  проектируется в точку  $A$ , и задача сводится к планиметрической:

Найти расстояние между точкой  $A$  (проекцией прямой  $a$ ) и прямой  $b'$  (проекцией прямой  $b$ ).

$$\rho = \rho(A, b').$$

Этот метод – частный случай предыдущего. Далее они носят общее название метода *перпендикулярной плоскости*.

Методы параллельной и перпендикулярной плоскостей – одни из центральных. К ним мы будем неоднократно возвращаться.

### 1.2.7. О сопутствующих задачах

Ранее выделены две типовые задачи на скрещивающиеся прямые  $a$  и  $b$ :

- найти угол  $\varphi$  между ними;
- найти расстояние  $\rho$  между ними, построить их общий перпендикуляр  $PQ$ .

Но могут быть, конечно, иные, сопутствующие задачи. Вот одна из них.

*В каком отношении общий перпендикуляр  $PQ$  пересекает скрещивающиеся отрезки  $AB$  и  $CD$ ?*

Отрезки  $AB$ ,  $CD$  лежат на скрещивающихся прямых  $a$  и  $b$ . Искомыми являются отношения:

$$\frac{AP}{PB} \text{ и } \frac{CQ}{QD}. \quad (*)$$

Это – прямая задача.

Обратная ей: *Даны отношения (\*)*.

*Доказать:  $PQ$  – общий перпендикуляр к прямым  $AB = a$  и  $CD = b$ .*

Эти и иные сопутствующие задачи решаются описанными здесь методами. Пример – задача из 7.2.1 главы 7. Сказанное подчеркивает актуальность освоения рассматриваемых здесь методов.

## 1.3. Выводы

1. Двум скрещивающимся прямым  $a$  и  $b$  соответствуют следующие основные элементы:

- две параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$ , проходящие через прямые  $a$  и  $b$  соответственно;
- плоскость  $\gamma$ , перпендикулярная плоскостям  $\alpha$  и  $\beta$  и, в частном случае, одной из прямых  $a$  или  $b$ ;
- проекции  $a'$ ,  $b'$  прямых  $a$ ,  $b$  на плоскость  $\gamma$  или на плоскости  $\alpha$ ,  $\beta$ .

С помощью этих элементов сформулированы основные *опорные свойства*, характеризующие геометрические свойства скрещивающихся прямых.

2. Выделены две основные  *типовые задачи*:
  - а) нахождение угла  $\varphi$  и
  - б) нахождение расстояния  $\rho$  и общего перпендикуляра между скрещивающимися прямыми.
3. Описаны некоторые сопутствующие задачи.
4. Решения типовых задач возможны *методами* параллельной и перпендикулярной плоскостей; описаны идеи этих методов.

Далее – подробное описание этих и других методов.

# Глава 2.

## Основные методы решения задач на скрещивающиеся прямые

Собранные здесь методы базируются на опорных свойствах, описывающих геометрию скрещивающихся прямых, в частности используют наличие параллельных и перпендикулярных им плоскостей. К ним, ввиду их важности, мы возвращаемся для более подробного описания и изучения соответствующих методов.

### 2.1. Метод параллельной плоскости

Он удобен прежде всего для нахождения угла  $\varphi$  между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ , т. е. для решения первой типовой задачи, а также полезен и для решения второй типовой задачи – нахождения расстояния  $\rho$  между ними.

*Суть и схема применения метода (рис. 3; 7).*

1. Выбрать удобную (для конкретной задачи) точку  $O$ . Она, в частности, может лежать на прямой  $a$ .
2. Через точку  $O$  провести две прямые  $a'$ ,  $b'$ , параллельные прямым  $a$ ,  $b$  соответственно:  $a' \parallel a$ ,  $b' \parallel b$ .

Плоскость  $\alpha = (a', b')$ , образованная прямыми  $a'$ ,  $b'$ , параллельна каждой из прямых  $a$ ,  $b$ .

3. В плоскости  $\alpha$  решить планиметрическую задачу: найти угол между прямыми  $a'$ ,  $b'$ ; получить таким образом искомым угол  $\varphi$  между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$ :

$$\varphi = \varphi(a, b) = \varphi(a', b').$$

*Напоминание.*

Углом между прямыми называется наименьший из углов между ними. Он не может быть тупым:  $\varphi \in [0; \frac{\pi}{2}]$ .

Тупым может быть угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , что иллюстрирует рис. 7. Здесь  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \pi - \angle(a', b') = \pi - \varphi$ .



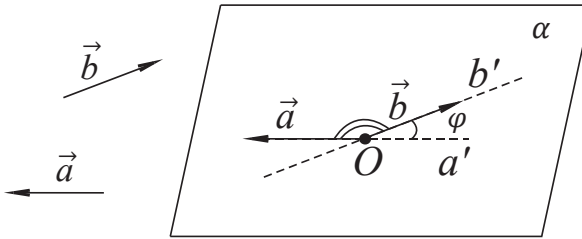
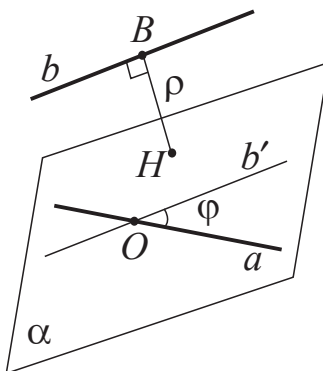


Рис. 7

Для нахождения расстояния  $\rho$  между скрещивающимися прямыми с помощью одной параллельной плоскости следует (рис. 8):

- выбрать на одной из прямых, например на прямой  $a$ , подходящую точку  $O$ ;
- через точку  $O$  провести прямую  $b'$  параллельно прямой  $b$ ;
- рассмотреть плоскость  $\alpha$ , проходящую через прямую  $a$  параллельно прямой  $b$ ; это – плоскость, образованная прямыми  $a$  и  $b'$ ;
- на прямой  $b$  найти подходящую точку  $B$  и найти расстояние  $BH$  от нее до плоскости  $\alpha$ ; оно равно искомому расстоянию

$$\rho = \rho(a, b) = \rho(\alpha, b) = \rho(B, \alpha) = BH.$$



$$\begin{aligned} b' &\parallel b \\ \alpha &\parallel b \\ \rho &= BH \perp \alpha \end{aligned}$$

Рис. 8

Для нахождения расстояния  $\rho$  между скрещивающимися прямыми  $a$  и  $b$  с помощью двух параллельных плоскостей следует (рис. 6):

- через каждую из прямых провести плоскость параллельно другой прямой и получить две параллельные плоскости  $\alpha$  и  $\beta$  ( $a \subset \alpha$ ,  $b \subset \beta$ );
- на одной из плоскостей, например на плоскости  $\beta$ , подобрать подходящую (для конкретной задачи) точку  $H_\beta$ ;

- решить вспомогательную задачу – найти расстояние от точки  $H_\beta \in \beta$  до плоскости  $\alpha$ :

$$\rho = \rho(\alpha, \beta) = \rho(H_\beta, \alpha) = H_\beta H_\alpha.$$

Еще раз подчеркнем:

на всей прямой  $b$  или на всей плоскости  $\beta$  легче найти подходящую точку  $H_\beta$ . Лишь в частном случае она может оказаться точкой  $Q$  – концом общего перпендикуляра  $PQ$ .