Предисловие

В этой тетради постепенно, поэтапно (в соответствии с теорией поэтапного формирования умственных действий и понятий проф. П.Я. Гальперина) формируется и строится алгоритм умножения, хотя и не доводится до общепринятого умножения «в столбик».

На всех этапах выявляется и подчёркивается значение общих закономерностей, которым подчиняются арифметические операции сложения и умножения – коммутативности и ассоциативности, а также связывающей их дистрибутивности.

Показывается, что именно дистрибутивность позволяет на базе таблицы умножения умножать многозначные числа, разбивая их в сумму однозначных. Оптимальный способ разбиения числа на слагаемые предлагается не сразу, для того, чтобы ребёнок смог оценить выгоду от именно такого способа представления числа. Ориентировочной основой действия в данном случае являются не только три правила арифметики (коммутативность, ассоциативность и дистрибутивность), но и особенность умножения на основание системы счисления («КОШКУ»). Обоснование правил арифметики иллюстрируется геометрически.

Материал этой тетради, основывается на учебнике – Абрамсон Я.И. «Математика. 1 класс». – СПб: Политехника-сервис, 2020. Онлайн версию алгоритмической части этого учебника можно найти на сайте **www.matematika-abramson.com**.

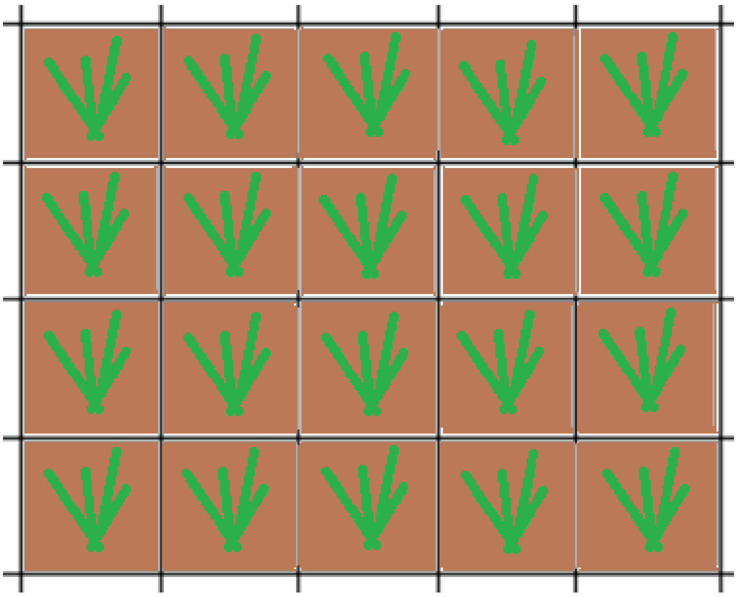
Занятие № 1

Задачи, которые приводят к появлению понятия умножения

В следующих примерах мы используем ДЕСЯТИЧНУЮ запись чисел.

Рассмотрим несколько задач.

1. Хозяйка засаживает грядки, на каждую грядку сажает по 5 кустов. У неё 4 грядки.



Сколько кустов посадит хозяйка?

В каждом ряду по 5, значит всего будет 5 + 5 + 5 + 5 = 20 кустов.

Что мы знали в начале задачи?

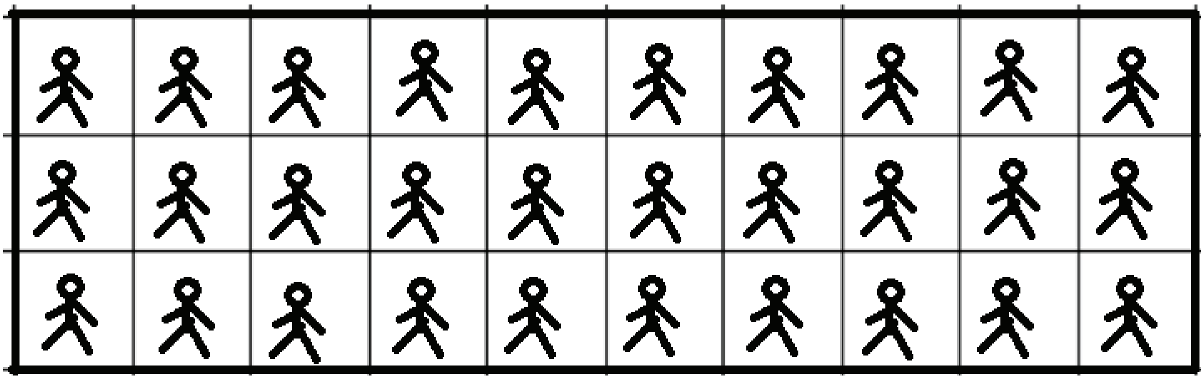
В задаче было два числа: 4 и 5.

Первое отвечало за то, сколько грядок у неё в огороде, второе – сколько в каждой грядке кустов. По этим двум числам, 4 и 5, мы получили ответ в задаче, в нашем случае – 20.

Итак (4, 5) ⇒ 20.

Запишем это так: 4 × 5 = 20. Значок «×» обозначает новую операцию – операцию **УМНОЖЕНИЯ**.

2. Мальчик строит шеренги из оловянных солдатиков. В каждой шеренге – по 10 солдатиков. Солдатиков поставили в затылок друг к другу в три шеренги.



Сколько солдатиков во взводе?

В этой задаче снова даны два числа: число солдат в шеренге (10) и число шеренг (3). Посчитать солдат не трудно, нужно просто сложить числа в каждой шеренге, 10 + 10 + 10 = 30.

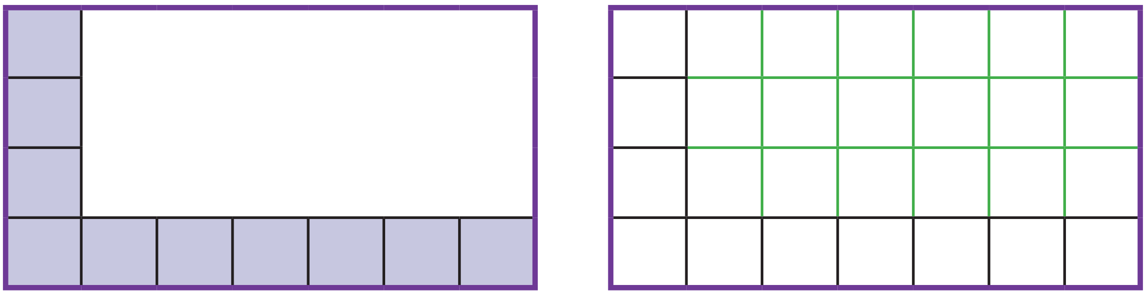
Итак (10, 3) ⇒ 30.

Запишем это так: 10 × 3 = 30.

3. Посчитаем *площадь* прямоугольного стола. Для того, чтобы это можно было сделать, надо разлиновать (расчертить) поверхность стола на квадратики.

Площадь стола, выраженная в квадратиках – *это число таких квадратиков, которое можно выложить вплотную друг к другу на столе, примыкая к его краям.*

В нашем примере мы видим что вдоль стола помещаются ровно 7 квадратиков, а поперек – ровно 4.



Сколько квадратиков помещается на этом столе?

И вновь, мы можем посчитать число квадратиков в ряду (7) и затем сложить это число с самим собой столько раз, сколько имеется рядов (4): 7 + 7 + 7 + 7 = 28. Опять-таки, тот же самый случай – мы складываем несколько раз одно и то же число.

Обозначение для умножения. Знак умножения

Выше мы уже встречались со значком «повёрнутого плюсика» для сокращённого обозначения записи сложения одинаковых чисел. Повторим это ещё раз.

Многократное, повторяющееся сложение одного и того же числа записывается с помощью знака **«×»**, называемого **знаком умножения**.

Например,

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28.$$

$$7 + 7 + 7 + 7 = 28.$$

Более короткая запись многократно, повторяющегося сложения одного и того же числа.

$$4 \times 7 = 28.$$

$$7 \times 4 = 28.$$

В этой записи фигурируют два числа: **слагаемое** (в этом случае это 7) и **количество этих слагаемых** (в этом случае это 4). Называются эти два числа, **сомножителями**.

Сама операция, которая заменила многократное сложение, как уже говорилось выше, называется **умножением**.

Её результат называется **произведением**.

Есть и другое обозначение для знака умножения – точка: **«·»**.

$$4 \times 5 = 4 \cdot 5;$$

$$3 \times 6 = 3 \cdot 6.$$

Так, в записи $4 \times 2 = 8$ числа 4 и 2 являются сомножителями, а число 8 – их произведением.

Домашнее задание

Упражнение №1

1. Запишите с помощью знака умножения следующие примеры на сложение:

   а) $4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$ _____ $\times 4$;

   б) $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 =$ _____ $\times$ _____;

   в) $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 =$ _____ $\times$ _____;

   г) $7 + 7 =$ _____ $\times$ _____;

   д) $3 + 3 + 3 + 3 =$ _____ $\times$ _____;

   е) $8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 + 8 =$ _____ $\times$ _____.

2. Запишите с помощью сложения следующие записи:

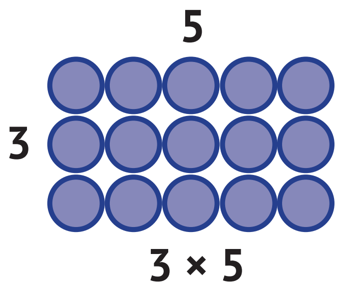
   а) $3 \times 6 = 3 +$ ______________________________;

   б) $5 \cdot 4 = 5 +$ ______________________________.

Занятие № 2

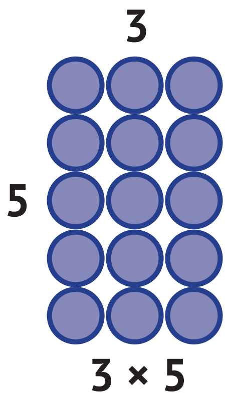
Некоторые свойства умножения

Изобразим умножение 3 × 5 как сложение 5 кружочков тремя рядами:



Если складывать по рядам, получаем 5 + 5 + 5. То есть, сложим три пятёрки.

Если складывать по колонкам, или просто повернуть эту картинку (или голову), то мы получим то же самое, но при сложении уже пяти троек: 3 + 3 + 3 + 3 + 3:



Получается, что 3 × 5 = 5 × 3.

Точно так же и при любых других сомножителях произведение **НЕ ЗАВИСИТ** от порядка сомножителей:

4 × 6 = 6 × 4;

3 × 7 = 7 × 3;

6 × 8 = 8 × 6;

9 × 5 = 5 × 9   и т. д.

Свойство это называется **коммутативностью**.

Ею обладает, как мы знаем, и сложение:

$$4 + 6 = 6 + 4;$$

$$3 + 7 = 7 + 3;$$

$$6 + 8 = 8 + 6;$$

$$9 + 5 = 5 + 9 \quad \text{и т. д.}$$

Посмотрим теперь, что получится, если одним из сомножителей будет единица:

$$1 \times 5 = 5 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5.$$

Точно так же:

$1 \times 6 = 6 \times 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 6;$

$7 \times 1 = 7;$

$8 \times 1 = 8;$

$9 \times 1 = 9$ и т. д.

Получается, что **при умножении любого числа на 1 число не меняется**, остаётся прежним.

А что получится, если умножить на ноль?

$3 \times 0 = 0 + 0 + 0 = 0;$

$4 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0;$

$5 \times 0 = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$ и т. д.

Получается, что **при умножении любого числа на 0 получается НОЛЬ**.

Таблицы умножения

Приставим друг к другу квадратики слева направо и пронумеруем их. Отметим на них натуральные числа, начиная с 2:

2	**3**	**4**	**5**	**...**	**...**

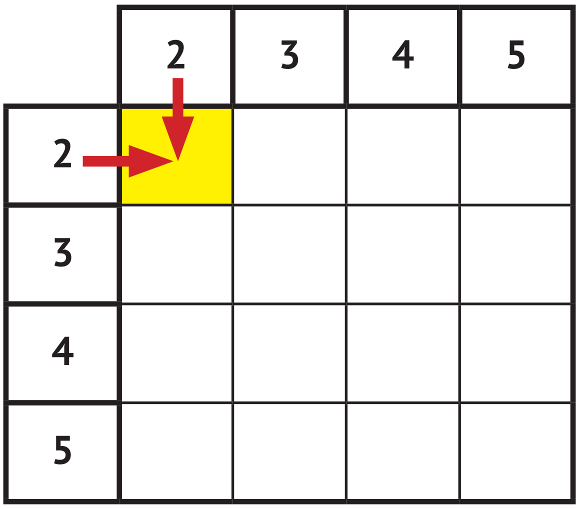
А теперь другие такие же квадратики приставим друг к другу сверху вниз:

2
3
4
5
...
...

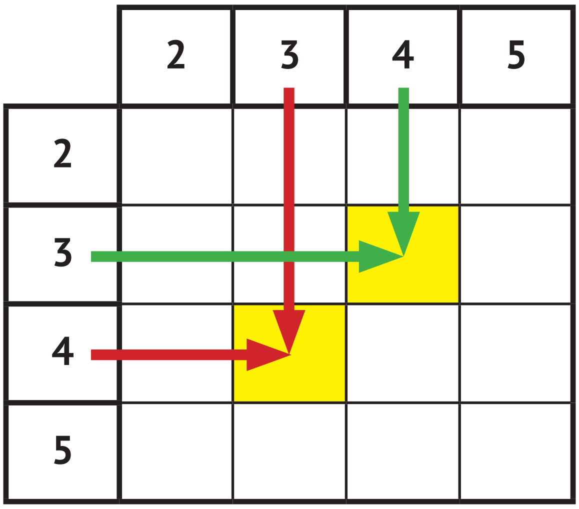
Получим таблицу, в которой на пересечении строк и столбцов будем ставить произведение чисел, которые стоят в первой, верхней строке и в первом, левом столбце:

	2	**3**	**4**	**5**
2				
3				
4				
5				

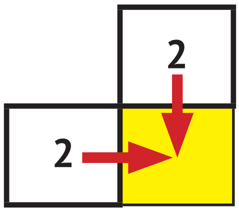
Так, например результат умножения 2 × 2 должен будет появиться на пересечении второй строки и второго столбца:



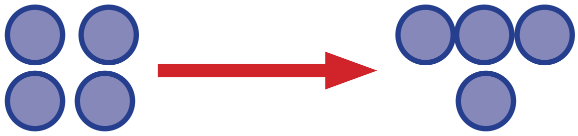
А результат умножения 3 × 4 должен появиться как на пересечении третьей строки и четвёртого столбца, так и на пересечении третьего столбца и четвёртой строки, причём эти числа должны быть равными из-за коммутативности умножения:



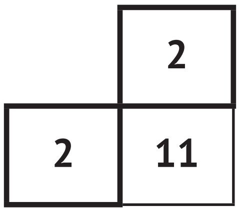
Мы начинаем с 2, так как умножать и на 1 и на 0 можно и без всяких таблиц. Но цифра «2» существует только в позиционных системах счисления, начиная с троичной (и выше). В двоичной нет такой цифры. Поэтому самая маленькая таблица умножения, состоящая всего **из одной строчки, одного столбца и одной клетки на их пересечении – это таблица умножения в троичной системе счисления**. В ней надо только заполнить клетку на пересечении двух двоек:



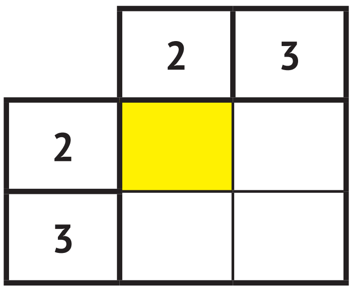
Получаем одну КОШКУ и одну МЫШКУ:



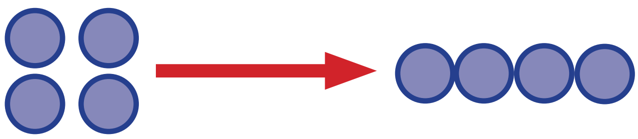
И поэтому пишем 11_3:



В четверичной системе счисления и строк и столбцов вдвое больше, потому что добавляется цифра 3:



В отмеченном квадратике должно помещаться произведение 2 × 2 в четверичной системе счисления. Теперь это уже просто КОШКА:



А это записывается как 10_4: