УДК 52
ББК 22.6
Ж35

Жаров, Владимир Евгеньевич.
Ж35 Сферическая астрономия / В. Е. Жаров ; Государственный астрономический институт им. П. К. Штернберга. — 480 с. — Москва : ДМК Пресс, 2022. — Текст : непосредственный.

ISBN 978-5-89818-109-3

В учебнике последовательно изложены основы фундаментальной астрономии. Формулируется рекомендуемый Международным Астрономическим Союзом (МАС) математический аппарат интерпретации и анализа астрометрических наблюдений.

Учебник может быть использован как справочник рекомендованных МАС и Международной службой вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ) формул редукции оптических и радионаблюдений.

УДК 52
ББК 22.6

На обложке: астрономический глобус с изображениями 67 созвездий.
Сконструирован К. Пфлигером (1665–1730) в 1725 г.
и установлен в Клементинуме (Прага) в 1727 г.

ISBN 978-5-89818-109-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Астрометрия — это область астрономии, занимающаяся установлением системы координат на небесной сфере. Ее раздел — сферическая астрономия, одной из задач которой является строгое математическое определение этой системы. В последние два десятилетия XX века в развитии астрометрии наступил новый этап. В связи с появлением и использованием в астрометрии новых инструментов, таких как радиоинтерферометры со сверхдлинными базами (РСДБ), дальномеры для лазерной локации Луны и спутников, космический телескоп ГИППАРКОС, а также развитием космических навигационных систем GPS и ГЛОНАСС, точность получаемых астрометрических данных повысилась на три порядка. Для корректной обработки результатов наблюдений (редукции) были разработаны новые алгоритмы, ориентированные на использование компьютеров. В связи с ростом точности при обработке наблюдений учитываются эффекты общей теории относительности (ОТО), используются точные формулы прецессии, нутации, аберрации и других эффектов.

В отличие от традиционного подхода, в котором использовался аппарат сферической тригонометрии, все новые алгоритмы редукции астрометрических наблюдений построены на основе векторного и тензорного исчисления с применением матричной алгебры, чтобы в максимальной степени оптимизировать время вычислений и сэкономить машинную память. Автор старался использовать стандартные (принятые или рекомендованные Международным астрономическим союзом) определения величин.

Увеличение точности наблюдений, широкое использование радиоинтерферометров и космических навигационных систем для решения задач астрометрии и геодинамики, повсеместное применение компьютеров для обработки данных требуют изменения содержания курса «Сферическая астрономия». Несмотря на то, что решение задач сферической астрономии выполняется на основе методов матричной и векторной алгебры, автор предпочел сохранить традиционное название «Сферическая астрономия».

Трудность создания нового курса заключается в сложности современных алгоритмов редукции наблюдений и необходимости доступного для студентов изложения. «Сферическая астрономия» читается в МГУ им. М. В. Ломоносова для студентов первого курса, когда общая подготовка по математике и физике еще не завершена. Поэтому некоторые вопросы приходится излагать без строгих доказательств. Это касается, главным образом, решений задач в рамках специальной и общей теории относительности. Строгие решения можно найти в учебнике М. В. Сажина «Общая теория относительности для астрономов».

В учебнике последовательно изложены основы фундаментальной астрономии, целью которой является определение инерциальной системы координат в пространстве — основы для изучения Вселенной. Для этого формулируется рекомендуемый Международным Астрономическим Союзом (МАС) математический аппарат интерпретации и анализа астрометрических наблюдений. Поэтому учебник, по мнению автора, может быть использован как справочник рекомендованных МАС и Международной службой вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ) формул редукции оптических и радионаблюдений (см. IERS Conventions (2003), которые в тексте называются как «Стандарты МСВЗ»).

В соответствии с основными задачами сферической астрономии содержание учебника следующее.

Первая часть посвящена определению систем координат на небесной сфере и преобразованию координат вектора из одной системы в другую с использованием как формул сферической тригонометрии, так и матриц вращения.

Во второй части рассматриваются различные шкалы времени, используемые в современной астрономии. Координаты небесных объектов меняются со временем из-за различных причин. Поэтому для изучения их движения необходимо задать единицы измерения времени и, кроме того, определить промежуток времени между наблюдениями. Принципы исчисления времени также рассматриваются во второй части. Определяются понятия: юлианская дата, юлианский год, эпоха каталога, эпоха равноденствия, стандартная эпоха, даются основы построения календаря. Здесь же рассматриваются причины неравномерности шкалы всемирного времени, связанные с неравномерностью вращения Земли.

Третья часть учебника посвящена определению топоцентрической, геоцентрической, гелиоцентрической и барицентрической систем координат. Особое внимание уделяется определению земной системы координат на основе современных наблюдений на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами и с помощью космических навигационных систем. Определяются геодезические, геоцентрические и астрономические координаты и устанавливается связь между ними.

В четвертой части рассматриваются явления рефракции, аберрации, причины параллактического смещения небесных объектов. В связи с широким использованием в настоящее время наблюдений в радиодиапазоне подробно рассматривается вопрос о радиорефракции. В отличие от прежних курсов по сферической астрономии, в данной части приводятся формулы точного учета аберрации и параллактического смещения. После исправления координат объекта из-за влияния рефракции, аберрации и параллакса получают его координаты, относящиеся к истинному экватору и равноденствию даты. Это означает, что положение небесного экватора и точки весеннего равноденствия вычисляются на момент наблюдения. Исправление наблюдаемых координат объекта (введение поправок за рефракцию, аберрацию и параллакс) т. е. приведение их к барицентрической системе отсчета является одним из этапов редукции. Учет нутации Земли позволяет определить координаты, отнесенные к среднему экватору и равноденствию даты.

Учет собственного движения небесного объекта и прецессии земной оси в пространстве позволяет преобразовать координаты объекта к системе, связанной со средним экватором и равноденствием стандартной эпохи. Положение небесных тел в этой системе координат является средним стандартным местом.

Основы теории прецессии и нутации даются в пятой части учебника. Здесь также рассматривается преобразование координат из-за этих явлений от одного равноденствия к другому.

В связи с широким использованием РСДБ в астрометрии в шестой части учебника кратко излагаются основы радионаблюдений и принципы обработки наблюдений. Также рассматриваются основы метода РСДБ, дается характеристика небесной и земной систем координат, которые задаются координатами радиоисточников и радиотелескопов, соответственно. Рассматриваются также особенности редукции наблюдений на радиоинтерферометрах со сверхдлинными базами. Обсуждаются проблемы, связанные со стабильностью реализованной и будущей небесных систем координат.

В приложениях приводятся определения основных астрометрических и математических терминов.

Автор выражает глубокую признательность К. В. Куимову, который прочитал рукопись и дал ценные советы и рекомендации, а также благодарит М. В. Сажина и О. А. Титова, обсуждения с которыми помогли значительно улучшить изложение материала, В. Н. Семенцова за помощь при редактировании текста.

Автор надеется, что предлагаемый учебник окажется полезным не только студентам-астрономам, но и студентам и аспирантам смежных с астрономией наук, и будет рад, если он поможет правильному пониманию основ сферической астрономии и астрометрии коллегами-астрофизиками.

Автор благодарен РФФИ за поддержку (гранты 01-02-16529, 02-05-39004, 05-02-17091). Полученные результаты частично были использованы при подготовке учебника.

ГАИШ МГУ *В. Е. Жаров*
2002–2005

ВВЕДЕНИЕ

Звуча в гармонии вселенной
И в хоре сфер гремя, как гром,
Златое солнце неизменно
Течет предписанным путем.
Непостижимость мироздания
Дает нам веру и оплот,
И, словно в первый день созданья,
Торжественен вселенной ход!

И. В. Гете «Фауст»

0.1. Основные задачи, решаемые сферической астрономией

За тридцать лет, прошедших после выхода прекрасного учебника профессора МГУ К. А. Куликова «Курс сферической астрономии», астрометрия изменилась коренным образом. Точность позиционных наблюдений возросла примерно в тысячу раз. Такой прогресс обусловлен вводом в строй и непрерывным совершенствованием радиоинтерферометров со сверхдлинными базами (РСДБ), инструментов для лазерной локации Луны и спутников, вводом в действие систем глобального определения местоположения (GPS и ГЛОНАСС), разработкой специальных спутников для проведения астрометрических наблюдений, а также разработкой новых методов обработки результатов. Успешное завершение космического проекта HIPPARCOS (аббревиатура от английского HIgh Precision PARallax COllecting Satellite или «спутник для высокоточного измерения параллаксов») позволило создать высокоточный каталог $\sim$ 120000 звезд. Измерение параллаксов дало ценнейшую информацию о пространственном распределении этих звезд около Солнца не только для астрометристов, но и для астрофизиков, специалистов по звездной динамике и небесной механике.

Каковы основные задачи астрометрии и сферической астрономии, о которой далее пойдет речь? Астрометрия является частью астрономии. Ее главной задачей является определение из наблюдений векторов положений и скоростей различных небесных тел, а также формы тел. Но положение или координаты тела могут быть определены лишь относительно другого тела или какой-то выбранной точки. В астрономии координаты измеряются в выбранной системе отсчета. Система отсчета (английский термин «reference system») — это условное понятие; на основе официальных соглашений определяются основные плоскости и точки, а также координатные оси системы. Ни оси, ни основные точки системы на небе не выделены. Поэтому в виде практической реализации системы отсчета («reference frame») принимается список координат и скоростей некоторого числа выбранных объектов (например, звезд или радиоисточников). Такой список называется *каталогом*. Отдельный каталог является одной из реализаций системы отсчета.

Таким образом, на основе наблюдений астрометрия определяет системы координат. Две таких системы имеют особую важность. Это небесная система координат, необходимая для определения движения небесных тел, и земная система координат, в которой измеряется положение наблюдателя. Желательно, чтобы небесная система координат была инерциальной. В этом случае уравнения движения записываются самым простым образом, т. к. в них отсутствуют силы инерции, обусловленные вращением системы отсчета.

Другой задачей астрометрии является определение моментов астрономических событий и промежутков времени между ними, т. е. определение и хранение времени.

Задачи, которые решает сферическая астрономия, связаны, главным образом, с математическими методами *редукции*[1] астрономических наблюдений.

Возникла сферическая астрономия в Древней Греции, хотя древнегреческие ученые многому научились у вавилонян. Это связано с необычайным расцветом математики в IV–II в. до н. э., и исполь-

---

[1] Редукция наблюдений — приведение координат и скоростей небесных тел от системы координат, в которой они непосредственно измерены, к стандартной системе.

зованием греческими учеными математических методов в астрономии. Краткий исторический обзор развития сферической астрономии и астрометрии приводится ниже. Безусловно, обзор не является исчерпывающим, так как автор старался выделить лишь основные этапы в развитии этой науки.

Рассмотрим основные задачи, которые решаются сферической астрономией. Первой задачей, как уже говорилось, является *определение систем сферических координат*, тогда как задачей астрометрии является построение этих систем в виде каталогов звезд, радиоисточников и других небесных объектов. После того, как системы координат определены, второй задачей сферической астрономии является *вывод формул преобразования координат небесных тел из одной системы в другую*.

Положение небесных объектов непрерывно меняется с течением времени. Поэтому для изучения их движения необходимо определить *шкалу и единицу времени* для задания точного момента наблюдений и промежутка времени между наблюдениями. *Определение различных шкал времени* и установление связи между ними — это третья важнейшая задача сферической астрономии.

Уточним здесь, что мы понимаем под координатами небесного тела. Астрометрические инструменты используют свойства принимаемого электромагнитного излучения, испускаемого этим телом, для определения направления на него. Направление на источник излучения может быть указано как в декартовой (при предположении, что он находится на сфере единичного радиуса), так и в сферической системе координат. В дальнейшем эти координаты (прямоугольные или сферические) будем называть «видимыми».

Если наблюдения проводятся с поверхности Земли, то видимые координаты небесных тел искажаются из-за *рефракции* и *аберрации*. Рефракцией называется искривление луча света от источника из-за преломления при прохождении земной атмосферы. Аберрация — это изменение направления на объект в результате движения наблюдателя и конечности скорости света. Кроме этих эффектов мы должны описать изменения, происходящие с электромагнитными волнами при распространении внутри инструмента, и учесть их при редукции наблюдений. Это отдельная задача, которая решается перед проведением астрометрических наблюдений. Она связана с изучением инструмента и свойств приемника излучения и в данном учебнике не рассматривается. Параметры инструмента и приемника могут быть получены в результате калибровки.

С другой стороны, положение самого небесного тела, например, в геоцентрической или барицентрической системе, может быть указано как в декартовой, так и в сферической системе. Изменение координат тела происходит из-за его *собственного движения в пространстве*. Кроме этого, при переходе от геоцентрической к барицентрической системе мы должны учесть перенос начала осей, что приводит к *параллактическому смещению*, а также поворот осей из-за прецессии, нутации и вращения Земли.

Учет рефракции, аберрации, параллактического смещения и собственного движения является классической задачей сферической астрономии и частью редукции наблюдений.

Координаты объекта после учета рефракции, аберрации и параллактического смещения относятся к системе координат, заданной на момент наблюдения, связанной с наблюдателем и называемой *топоцентрической*. Для разных наблюдателей положение осей этой системы будет различным относительно *земной системы координат*. В свою очередь, положение земной системы координат относительно *инерциальной системы координат* изменяется из-за *собственного вращения Земли, ее движения по орбите вокруг Солнца, прецессии и нутации*. Поэтому для преобразования координат объекта из системы, связанной с наблюдателем, сначала в земную систему координат, а затем в инерциальную систему, необходимо знать *фигуру Земли* и *параметры вращения Земли*.

Изучение вращения Земли — одна из важнейших задач астрометрии. В курсе «Сферической астрономии» мы лишь кратко коснемся этой проблемы, поскольку изучение вращения Земли необходимо для установления связи между земной и небесной системами координат. Без этой связи нельзя выполнить редукцию наблюдений. Кроме того, построение теории вращения Земли — это интересная задача на стыке многих наук: астрономии, механики, геофизики. В свою очередь, изучение фигуры Земли — это задача геодезии и гравиметрии. Заметим, что на современном этапе границы между этими науками практически стерлись. Измерение координат пункта с миллиметровой точностью невозможно без проведения гравиметрических измерений, без точного измерения и хранения времени в данном пункте.

Вращение Земли вокруг оси издавна принималось за основу счета времени. Сутки — одна из основных единиц счета времени и в природе, и в человеческой жизни. Лишь в середине XX века было доказано, что *продолжительность суток* (или угловая скорость вращения Земли вокруг оси) не остается постоянной. Значительно раньше (в конце XIX века) было обнаружено *движение полюсов*, т. е. изменение положения мгновенной оси вращения относительно главной оси инерции Земли.

Таким образом, вектор мгновенной угловой скорости вращения Земли, две компоненты x и y которого определяют положение полюса (или мгновенной оси вращения Земли), а третья — продолжительность суток, не остается постоянным ни по величине, ни по направлению. Три компоненты угловой скорости (или параметры вращения Земли — ПВЗ) не могут быть предсказаны с требуемой точностью на основе теории. Существует множество причин (в том числе и неизвестных), следствием которых являются вариации компонент угловой скорости. Изменения компонент довольно малы, но спектр очень сложен[2]. К настоящему времени в спектре продолжительности суток обнаружены колебания с периодами от нескольких часов до полутора тысяч лет с амплитудами от 2–3 мкс до $\sim$ 2 мс. Так как продолжительность суток примерно равна 86400 с, то максимальное относительное изменение скорости вращения Земли не превышает $\sim 2 \cdot 10^{-8}$. В спектре движения полюсов также найдены внутрисуточные и сезонные колебания с амплитудами от 10 до 50 мкс дуги (1 сек дуги $= 1'' \approx 1$ радиан$/206264,80624709636$). Наибольшую амплитуду ($\sim 0\overset{''}{.}2$) имеет *чандлеровское колебание* с периодом $\sim 1,2$ года и годовое колебание с амплитудой $\sim 0\overset{''}{.}1$. Полюс не отклоняется от главной оси инерции Земли более чем на 15 м.

Кроме периодических вариаций в скорости вращения Земли и в движении полюсов обнаружены вековые изменения: скорость вращения замедляется (продолжительность суток увеличивается), а полюс смещается относительно условного международного начала в направлении $\sim 75\overset{\circ}{.}7$ западной долготы.

[2] Сложные периодические сигналы, к которым относятся и параметры вращения Земли, можно представить в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте сигнала. Разложение сигнала на гармоники называется *гармоническим анализом*. В результате анализа определяется спектральная функция (*спектр* сигнала), которая содержит информацию об амплитудах и фазах отдельных гармоник.

Причинами неравномерности вращения Земли и движения полюсов являются внешние и внутренние процессы. К внешним процессам обычно относят приливное действие Луны и Солнца, а к внутренним — движения в атмосфере, в Мировом океане и в жидком ядре, а также перераспределение масс в коре и мантии.

Приливное воздействие Луны и Солнца приводит не только к изменению положения земного шара относительно вектора мгновенной угловой скорости, но и к изменению направления самого этого вектора в пространстве. Это явление называется *лунно-солнечной прецессией.* Причиной прецессии оси вращения является момент сил, возникающий из-за действия Луны, Солнца и планет на экваториальное утолщение Земли.

Прецессия изменяет со временем вид звездного неба. Амплитуда прецессии равна $\sim 23^\circ\!.5$, а период — примерно 26000 лет. Кроме прецессионного смещения в пространстве, которое называют вековым из-за большого периода по сравнению с другими гармониками, ось вращения испытывает и периодические колебания (*нутацию*) с гармониками, основные из которых имеют периоды 13,7 суток, 27,6 суток, 6 месяцев, 1 год, 18,6 лет. Гармоника с периодом 18,6 лет имеет максимальную амплитуду ($\sim 9''\!.2$). В результате нутации ось вращения описывает сложные петли в пространстве (рис. 1).

Разработка теории нутации Земли является одной из самых сложных задач астрометрии, геофизики и небесной механики. *Учет влияния прецессии и нутации* при вычислении взаимной ориентации земной и небесной систем координат является одной из задач сферической астрономии.

Необходимость рассмотрения теории вращения Земли в данном курсе связана также с определением *небесного эфемеридного* и *небесного промежуточного полюсов*, изучением суточных движений полюсов и их связи с нутационным движением оси вращения Земли. Движение полюсов согласно определению, принятому на XVII Генеральной Ассамблее МАС (Монреаль, 1979 г.), представляет движение небесного эфемеридного полюса, определенного с помощью принятой теории прецессии и нутации, по отношению к связанной с Землей координатной системе.

Теория нутации IAU1980 была рекомендована для использования во всех астрометрических вычислениях, начиная с 1984 г., и использовалась до 1 января 2003 г. С этого момента, согласно резо-

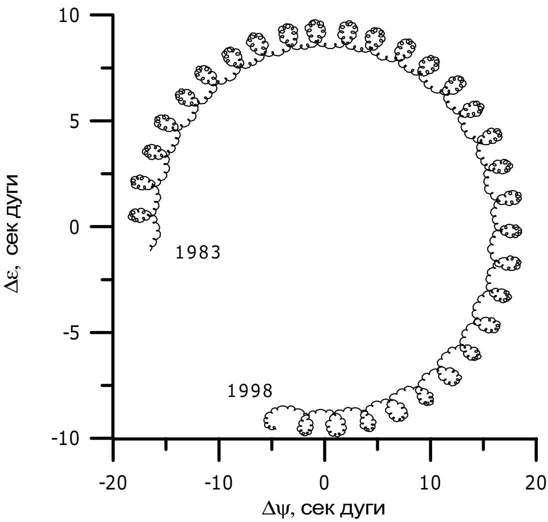

Рис. 1. Нутация оси Земли (без учета прецессионного движения) с 1983 по 1998 гг. Нутационное движение разложено на две компоненты: $\Delta\psi$— нутацию в долготе и $\Delta\varepsilon$—нутацию в наклоне (обратите внимание, что оси имеют разный масштаб). Главная нутационная гармоника, имеющая период, равный 18,6 года, определяется поворотом плоскости лунной орбиты. Меньшие петли вызваны эллиптичностью орбит Луны и Земли, наклоном орбиты Луны к эклиптике и рядом других причин. Теория нутации Земли IAU1980 включает 106 гармоник нутационного движения с периодом от 18,6 лет до 4,7 суток и амплитудами от $\sim 9\overset{\prime\prime}{.}2$ до менее 1 мс дуги.

люции XXIV Генеральной Ассамблеи МАС (Бирмингем, 2000 г.), при редукции наблюдений должна использоваться новая теория нутации IAU2000. Эта теория включает примерно 1500 нутационных гармоник, и ошибка не превышает $0,2$ мс дуги. В связи с переходом к новой теории нутации был определен *небесный промежуточный полюс*. Это было вызвано необходимостью разделения высокочастотных нутационных гармоник, которые вычисляются на основе теории, и высокочастотных гармоник в движении полюсов Земли, которые определяются на основе наблюдений.

Знание положения оси вращения в пространстве и в теле Земли необходимо для определения ориентации земной системы координат относительно небесной системы, которая с 1998 г. задается координатами ~ 600 внегалактических радиоисточников. Начало этой системы помещается в центр масс (*барицентр*) Солнечной системы. Из-за большого расстояния до радиоисточников их видимое собственное движение относительно земного наблюдателя очень мало. Поэтому небесная система близка к инерциальной системе координат[3]. Реализацией земной системы координат являются геоцентрические прямоугольные координаты более чем 500 станций, расположенных в 290 пунктах наблюдений.

Земная и небесная системы координат являются основой для построения теории прецессии и нутации, изучения тектоники, деформаций земной коры, а также для решения задач космической геодезии и навигации. В связи с ростом точности решаемых в этих областях задач требуется создание инерциальной системы координат, направления осей которой должны быть определены с погрешностями не более $0,1$ мс дуги, и земной системы координат с погрешностями взаимных положений пунктов не более 2–3 мм. Небесная и земная системы координат должны связываться новой теорией нутации и прецессии неупругой Земли, согласующейся с наблюдениями в пределах ± 1 мс дуги. Для решения этой задачи требуется также знать параметры вращения Земли, которые, как было сказано выше, не могут быть предсказаны с требуемой точностью. Поэтому для определения ПВЗ проводятся регулярные наблюдения звезд, радиоисточников, искусственных спутников Земли, Луны.

Подытожим сказанное. Накопление наших знаний о Земле отразилось в повышении точности определения астрономических постоянных, характеризующих Землю, ее вращение вокруг оси и обращение вокруг Солнца. Радиолокация планет позволила с высокой точностью определить величину астрономической единицы, которая является основной единицей расстояния в Солнечной системе. Измерения координат космических аппаратов, запущенных для исследования тел Солнечной системы, привели к уточнению масс планет. Эти данные привели к построению новой теории прецессии и нутации Земли. Разработка новых средств для проведения астрометрических наблюдений привела к резкому повышению точности определения координат объектов (искусственных спутников, звезд, радиоисточников) на небесной сфере и точек на земной поверхно-

[3]В идеальном случае небесная система координат должна быть инерциальной. Однако из-за непредсказуемых движений небесных тел и ошибок наблюдений возможны малые случайные и систематические повороты реализованной системы координат. Поэтому часто такую систему называют квазиинерциальной.

сти. Найдя из наблюдений параметры вращения Земли, можно определить ориентацию земной системы координат в пространстве, т. е. в конечном счете вычислить координаты небесных тел в инерциальной системе.

Это очень сложная задача, решение которой требует колоссальных затрат. Но мировое сообщество идет на эти расходы, так как это нужно для удовлетворения хозяйственных, политических, военных и научных потребностей.

0.2. Краткий исторический обзор

Астрометрия — одна из самых древних наук — появилась на заре человечества из-за необходимости человека определять свое местоположение, измерять промежутки времени, предсказывать наступление астрономических событий и т. д. Как и любая наука, астрометрия началась с накопления данных, которыми были результаты наблюдений за звездами, Солнцем, Луной, планетами. Измерение положений этих объектов явилось основой для построения первых моделей Вселенной.

Строго говоря, до изобретения телескопа в начале XVII века астрономия являлась астрометрией. Основными задачами древней астрономии были определения моментов определенных событий, связанных с религией, мифологией и т. д. Хозяйственные нужды требовали установления точного календаря, основанного на наблюдениях Солнца, Луны и звезд. Из большого количества клинописных глиняных табличек, найденных на территории Месопотамии, достоверно известно, что древневавилонские астрономы вели регулярные наблюдения за небом. Вавилонские жрецы, которые, собственно, и занимались астрономией, вели и записывали наблюдения различных небесных явлений: затмений Солнца и Луны, появлений комет и других небесных тел. За $\sim$ 2500 лет они установили периодичность затмений, что позволяло предсказывать их. Позднее наблюдения лунных затмений были использованы сначала Гиппархом, а затем Птолемеем для построения теории движения Луны.

В Вавилонии была изобретена шестидесятиричная система счисления, от которой идет современный счет времени: в одном часе содержится 60 минут, в одной минуте — 60 секунд. Лунно-солнечный календарь был создан здесь в начале второго тысячелетия до н. э.

Таблички донесли до нас указ царя Хаммурапи о введении дополнительного месяца с целью подтягивания продолжительности лунного года (354,36 суток) к солнечному (или тропическому) году — 365,24 суток.

Значительные достижения в астрономии связаны с наблюдениями древнеегипетских жрецов. Существование Египта зависело от разливов Нила, приносивших на поля плодородный ил. Если они запаздывали, стране грозили неурожай и голод. Неудивительно поэтому, что египтяне внимательно следили за важнейшим событием — появлением на небе Сириуса перед восходом Солнца, совпадавшим с ежегодным разливом Нила. Можно сказать, что египетскую астрономию создала необходимость вычисления периодов подъема и спады воды в Ниле. Египтяне дали определение *эклиптики* — видимого пути Солнца на фоне созвездий и разделили ее на двенадцать частей, образовавших Зодиак, т. е. «круг зверей». Наблюдения, проводившиеся жрецами, позволили создать точный солнечный календарь; была определена продолжительность года в 365, 25 суток. Для измерения времени использовались водяные и солнечные часы. Благодаря этим достижениям астрономов история Древнего Египта известна очень хорошо.

Наблюдения жрецов Вавилона и Египта не потеряли ценности и в наши дни. На основании записей моментов затмений жрецами и вычислений этих моментов с помощью современных теорий движения Земли и Луны оказалось возможным вычислить замедление скорости вращения Земли за последние ~ 2500 лет.

Дальнейший прогресс астрономии–астрометрии связан, в первую очередь, с достижениями в области математики во время расцвета древнегреческой науки. Астрономия в Древней Греции стала точной математической наукой.

Многому греческие ученые могли научиться у вавилонян. Этому способствовали торговые связи между городами Древней Греции и Вавилоном. Наиболее тесные контакты греков с вавилонянами относятся к эпохе Нововавилонского царства (605 г. до н. э. — 539 г. до н. э.). Это и было как раз время зарождения греческой науки. Многие достижения вавилонян в области наблюдательной астрономии были позже использованы греческими учеными.

Первым древнегреческим астрономом и математиком был Фалес Милетский, живший в конце VII — первой половине VI в. до н. э.

Он — один из «семи мудрецов» — прославился предсказанием солнечного затмения, случившегося в 585 г. до н. э., хотя реальная возможность такого предсказания, даже при условии, что Фалес был знаком с вычислениями вавилонских жрецов, в настоящее время подвергается сомнению. Ему приписывается также установление времени равноденствий и солнцестояний, определение продолжительности года в 365 суток, понимание того, что Луна светит не своим светом и т. д. Как и вавилоняне и египтяне, он не понимал того, что происходит во время затмений, а просто использовал периодичности, найденные жрецами Вавилона и Египта. Опираясь на результаты вавилонской науки, Фалес пытался разобраться в строении Вселенной, определить порядок расположения звезд, Солнца, Луны по отношению к Земле, которую он представлял плоским диском. Он считал, что ближе всего к Земле находятся звезды, а дальше всего — Солнце.

Анаксагору из Клазомен (предположительно 500–428 гг. до н. э.) принадлежит заслуга правильного объяснения не только солнечных, но и лунных затмений. Происходя из богатой и знатной семьи, он отказался заниматься хозяйством и говорил, что родился для того, «чтобы созерцать Солнце, Луну и небо». Он утверждал, что Солнце — это огненная глыба, которая по размерам больше Пелопоннеса; Луна подобна Земле, на ней есть холмы и ущелья, она получает свет от Солнца и обитаема. Земля, по Анаксагору, плоская.

Эмпедокл из Агригента (около 490–430 гг. до н. э.) — астроном и философ, поэт и политический деятель, отказавшийся от царской власти, также объясняет затмения прохождением между Землей и Солнцем темной Луны. Неясно, какой представлял себе Эмпедокл форму Земли, но Луна у него имеет плоскую форму, получая свой свет от Солнца.

Поразительна догадка Эмпедокла о том, что свет распространяется с большой, но конечной скоростью. К сожалению, эта (и многие другие гениальные догадки древних греков) были отвергнуты благодаря авторитету Аристотеля, который писал: «Эмпедокл и всякий другой, придерживающийся того же мнения, неправильно утверждали, будто свет передвигается и распространяется в известный промежуток времени между землей и небесной твердью, нами же [это движение] не воспринимается» из-за того, что скорость света очень велика.

Впервые гипотеза о шарообразности Земли была сформулирована пифагорейцами. В пифагорейской школе оформилась классическая модель космоса, в которой небесные светила располагались на семи сферах, в следующем порядке по мере удаления от Земли: Луна, Солнце, Меркурий, Венера, Марс, Юпитер и Сатурн. При своем вращении сферы издают отдельные тона. Например, звук Луны высокий и пронзительный, звук Сатурна самый низкий. В совокупности звуки образуют гармоничную мелодию — «музыку сфер», слышать которую, как утверждают античные источники, мог Пифагор, обладавший очень тонким слухом.

Пифагореец Филолай из Тарента, живший в конце V века до н. э., изменил эту модель. Он поместил в центр мира Огонь, вокруг которого вращается десять сфер: сфера неподвижных звезд, сферы пяти планет, сферы Луны, Солнца, Земли и невидимой «Противоземли». Филолай буквально поклонялся декаде. Поэтому Противоземля введена для круглого счета, как десятое небесное тело; с ее помощью «объяснялись» лунные затмения. Центральный огонь с Земли не виден, так как его загораживает Противоземля.

От теории пифагорейцев в современной астрономии сохранилось понятие «небесная сфера». Отказ от геоцентризма, признание шарообразной формы Земли, ее обращения вокруг центрального огня, объяснение времен года наклоном земной орбиты по отношению к солнечной орбите (Солнце тоже обращается вокруг центрального огня), объяснение солнечных затмений прохождением Луны между Солнцем и Землей представляли приближение к истине, без чего не возникла бы гелиоцентрическая система Аристарха Самосского.

Во второй половине V в. до н. э., благодаря наблюдениям афинских астрономов Метона и Эвктемона, была установлена продолжительность тропического года и неравенство времен года. Метон ввел 19-летний цикл, который содержит 6940 суток и почти в точности равен длительности 235 лунных (синодических) месяцев. Средняя длительность года в метоновом цикле составляла 365, 26316 суток, что всего на 19 минут длиннее введенного четырьмя столетиями позднее юлианского года (365, 25 сут.) и на 30 минут — длительности тропического года во время Метона (365, 2425 сут.) Длительность лунного месяца в метоновом цикле была всего на 2 минуты больше точного значения. Эвктемон из наблюдений равноденствий и солнцестояний нашел, что длительность весны равнялась 93 суткам, лета — 90, осени — 90, зимы — 92, т. е. обнаружил неравномерность движения Солнца по эклиптике. Столетие спустя астроном Каллипп, ученик и помощник Аристотеля, улучшил метонов цикл и уточнил неравенство времен года.

Выдающиеся достижения греческой астрономии IV в. до н. э. связаны с именами Евдокса Книдского (ок. 400–355 г. до н. э.) и Аристотеля (384–322 г. до н. э.). Евдокс был великим математиком. Он первым привнес в астрономию строгие математические методы, и поэтому его считают создателем античной теоретической астрономии.

По уже сложившемуся мнению греческих мыслителей наиболее совершенным геометрическим телом являлся шар, а наиболее совершенной плоской фигурой — круг. Поэтому задачей Евдокса, которую он блестяще решил, было согласование предположения о движении небесных тел по круговым орбитам с наблюдениями. Из наблюдений же следовало, что орбиты Солнца и Луны не являются круговыми; видимые траектории движения планет также далеки от круговых. Евдокс представил неравномерные движения небесных тел в виде комбинаций равномерных круговых движений. С каждым телом (за исключением неподвижных звезд) связано определенное число равномерно вращающихся сфер. Связь сфер выражалась в том, что полюсы каждой внутренней сферы фиксированы относительно внешней. Поэтому каждая сфера, помимо собственного вращения, участвует во вращении всех наружных сфер. Само небесное тело фиксировано в определенной точке экватора самой внутренней сферы. Всего в модели Евдокса 27 равномерно вращающихся вокруг Земли сфер, центры которых совпадают, а оси вращения могут иметь различное направление.

Модель космоса Евдокса далека от реальной картины, но это была первая математическая модель. В этой связи заметим, что разработка теории движения небесных тел в виде комбинации вращающихся сфер неизбежно должна была привести к разработке сферической геометрии и кинематики точки. Мы знаем об этом из двух небольших сочинений, написанных неким Автоликом в конце IV в. до н. э.

Теория Евдокса была улучшена впоследствии Каллиппом и Аристотелем. Каллипп добавил ряд дополнительных сфер, чтобы лучше согласовать результаты для внутренних планет, объяснить различную длительность времен года. Всего в модели стало 34 сферы.

Аристотель еще более усложнил теорию Евдокса. Благодаря его авторитету теоретическое построение стало восприниматься как реальный механизм движения небесных тел. Земля находилась в центре мира и была неподвижна. Согласно Аристотелю вращающаяся сфера неподвижных звезд увлекает за собой следующую сферу — это внешняя сфера Сатурна. Та в свою очередь увлекает вторую сферу Сатурна и т. д. Для исключения влияния Сатурна на Юпитер (чтобы последний не повторял движения Сатурна) Аристотель помещает между ними три нейтрализующих сферы. Аналогично он поступает для других планет. Всего в его модели уже 56 сфер, причем это надо понимать буквально — небесные тела прикреплены к эфирным сферам, и движутся не сами тела, а сферы. Космос Аристотеля конечен, он имеет форму сферы, за пределами которой нет ни пространства, ни времени. Вне его находится лишь Перводвигатель-бог, который приводит в движение сферу неподвижных звезд.

Следующий важный шаг в теории устройства космоса был сделан учеником Платона Гераклидом Понтийским (IV в. до н. э.). Он предположил, что вращение небесной сферы может быть объяснено вращением самой Земли. Для объяснения изменения яркости Меркурия и Венеры — важнейшего недостатка моделей Евдокса и Каллиппа — Гераклид предположил, что они обращаются вокруг Солнца, а не вокруг Земли. Звезды, которые Платон считал «божественными», Гераклид рассматривает как простые небесные тела.

Аристарх Самосский (310–230 г. до н. э.) пошел дальше своего предшественника. На основе математических расчетов он доказывает, что Солнце должно быть гораздо больше Земли по размерам. Каким образом он сделал этот вывод? Аристарх фиксирует момент, когда Луна находится в первой (или последней) четверти, т. е. когда освещена ровно половина лунного диска. Измерив угол между направлениями на центры лунного и солнечного дисков, можно найти угол, под которым из центра Солнца видно расстояние Земля–Луна. По наблюдениям Аристарха этот угол равняется одной тридцатой прямого угла ($\sim 3°$). Так как отношение расстояния от Земли до Луны к расстоянию от Земли до Солнца равно синусу этого угла ($\sim 0,05$) Аристарх заключает, что Солнце должно быть в 18–20 раз дальше от Земли, чем Луна. Так как угловые размеры Солнца и Луны примерно равны, то их диаметры находятся в той же пропорции, что и их расстояния до Земли.

Для вычисления отношения диаметра Солнца к диаметру Земли Аристарх предполагает, что поперечник земной тени, в которую попадает Луна во время затмения в два раза больше диаметра Луны. Использую эту гипотезу и найденное выше соотношение между расстояниями от Земли до Луны и Солнца, он находит отношение диаметров Солнца и Земли, которое равно $19/3$. Отсюда он находит, что объем Солнца должен быть примерно в $(19/3)^3$ или приблизительно 250 раз больше объема Земли. Хотя эта цифра занижена, можно полагать, что этого было достаточно для возникновения сомнений в правильности геоцентрической системы мира: если Солнце столь велико, то почему ему не быть в центре космоса. В подобной системе мира сразу решается проблема с изменениями яркости планет. В ответ на возражение, что движение Земли должно привести к смещению положения звезд (то, что сегодня мы называем параллактическим смещением), Аристарх говорит о большой величине радиуса небесной сферы.

Метод рассуждений Аристарха Самосского — безупречен. Ошибочными были наблюдения. В действительности угол, под которым из центра Солнца видно расстояние Земля—Луна, равен не 3°, а всего $\sim 8,5'$. Значит отношение расстояний Земля–Солнце и Земля–Луна равно не 18–20, а ~ 400.

В качестве основных возражений противников гелиоцентрической системы Аристарха Самосского обычно приводят следующие. При предположении, что все планеты движутся по круговым орбитам вокруг Солнца, невозможно объяснить неравенство времен года. Подобные возражения высказывались и Копернику, который обосновывая гелиоцентрическую картину мира, следовал все же античной традиции и считал, что планеты двигаются по круговым орбитам. Так же, как и древние астрономы, Коперник полагал, что наблюдаемые неравномерные движения являются результатом сложения нескольких круговых движений, и использовал прекрасно разработанную в Древней Греции теорию эпициклов и эксцентров. Лишь через полвека проблема неравенства времен года была разрешена в работах Кеплера, установившего, что планеты, в том числе и Земля, движутся по эллиптическим, а не круговым орбитам.

В качестве второго возражения обычно приводят аргументы Клавдия Птолемея. По его словам все предметы, не связанные жестко с Землей, должны двигаться в направлении, обратном вращению Земли. Поэтому «ни облака, ни другие летающие или парящие объекты никогда не будут видимы движущимися на восток», т. е. в направлении вращения Земли. Против этого заключения довольно трудно возразить, особенно в рамках аристотелевской физики, в которой не был известен закон инерции.

Кроме выдающихся теоретических работ в III в. до н. э., в Древней Греции, по-видимому, проводятся первые позиционные наблюдения звезд. Астрономы-наблюдатели Аристилл и Тиморахис (III в. до н. э.), используя специальные угломерные инструменты (описание которых, к сожалению, не сохранилось), определяли прямые восхождения и склонения звезд, т. е. координаты в экваториальной системе и получили первый звездный каталог. Впоследствии Гиппарх и Птолемей использовали эти наблюдения для исследования прецессии.

Эратосфен из Кирены (276–194 гг. до н. э.), измерив дугу меридиана между Александрией и Сиеной, вычислил размер земного шара. Из его вычислений следует, что длина окружности меридиана составляет около 252000 стадиев[4], или 39690 км, что всего на 310 км отличается от истинного значения. Кроме этой работы Эратосфен определил наклон эклиптики к экватору с ошибкой всего в $8'$, которое затем было использовано Гиппархом и Птолемеем.

Гиппарх (ок. 180–125 гг. до н. э.) — величайший астроном античного времени. Заслуги Гиппарха громадны — как в области наблюдательной, так и теоретической астрономии[5]. Прежде всего его имя связано с разработкой законченной теории эпициклов и эксцентров.

Поскольку Гиппарх занимался разработкой календаря, вполне естественно, что он пытался сначала построить теорию движения Солнца и Луны. Для этого он использовал понятия эпициклов и эксцентров, введенные его предшественниками, для объяснения неравномерности движения Солнца по эклиптике и вывел «первое неравенство»: разность в положении центра истинного и среднего Солнца. В современной литературе это неравенство известно как «уравнение времени». Но этим вклад Гиппарха в развитие астрономии не ограничивается.

---

[4] Длина египетского стадия, которым, по-видимому, пользовался Эратосфен, была равна 157,5 м.

[5] Первый космический астрометрический эксперимент, названный HIPPARCOS (ГИППАРКОС), напоминает нам о Гиппархе.

Он по справедливости считается создателем прецизионной наблюдательной астрономии. Сравнивая свои наблюдения с наблюдениями Аристилла и Тиморахиса, он обнаружил, что изменились лишь долготы звезд, а широты остались неизменными. Гиппарх объяснил это тем, что точка осеннего равноденствия за примерно сто семьдесят лет переместилась вдоль эклиптики с востока на запад на 2°, т. е. постоянная прецессии равна $\sim 43''$, что всего на 15% меньше истинного значения. На основе этого открытия он смог очень точно определить продолжительность тропического года (с ошибкой всего 6 мин).

Птолемей в «Альмагесте», ссылаясь на работу Гиппарха «О длительности года», приводит следующую цитату: «...солнцестояния и равноденствия за один год отступают по меньшей мере на 1/100 градуса в год». Таким образом, Гиппарх указывает нижний предел ($36''$) постоянной прецессии, что вполне согласуется с учетом ошибок наблюдений с приведенной выше оценкой. Птолемей не придал значения оговорке «по меньшей мере» и принял за величину прецессии именно это значение ($36''$), утвердив ошибку своим авторитетом на сотни лет.

Динамическое объяснение прецессии, т. е. на основе законов механики, впервые было дано Ньютоном. Во времена Гиппарха, когда еще не было ни динамики, ни данных о сжатии Земли, не могло существовать правильного объяснения прецессии.

Огромной заслугой Гиппарха явилось составление первого звездного каталога, дошедшего до нас. Впоследствии этот каталог был дополнен Птолемеем и приведен в «Альмагесте». Считается, что бо́льшая часть звезд этого каталога (около 850) наблюдалась именно Гиппархом.

За следующие два столетия после смерти Гиппарха не появилось сколько-нибудь значительных работ, хотя астрономия была популярной наукой. Упомянем лишь о книге Гемина (первая половина I в. до н. э.) «Элементы астрономии», в которой излагаются основы сферической астрономии в популярном изложении.

Новый подъем в астрономии происходит лишь в конце I в. н. э., уже в эпоху Римской империи, и связан с Птолемеем. Непосредственным предшественником Птолемея был выдающийся астроном Менелай Александрийский. Помимо наблюдений, которые впоследствии использовал Птолемей, он активно работал в области тригонометрии. В арабском переводе до нас дошла его «Сферика», состоящая из трех книг, в которых он доказывает ряд теорем о сферических треугольниках. В «Альмагесте» Птолемей также приводит доказательства этих теорем, но не делает ссылок на Менелая (как впрочем и на Евклида и Архимеда). Тем не менее «Альмагест» Клавдия Птолемея (ок. 100–165 г.) — выдающееся достижение античной астрономии[6]. В тринадцати книгах «Альмагеста» Птолемей изложил и систематизировал достижения древнегреческих астрономов, и прежде всего Гиппарха. В первых двух книгах автор излагает основы сферической тригонометрии, дает описание некоторых угломерных инструментов и приводит решение ряда задач сферической астрономии. Затем рассматривается движение Солнца и Луны. Шестая книга посвящена теории солнечных и лунных затмений. Седьмая и восьмая книги содержат знаменитый звездный каталог 1027 звезд, составленный Птолемеем на основании своих наблюдений[7] и наблюдений Гиппарха. Книги с девятой по тринадцатую посвящены теории движения планет.

Помимо того, что «Альмагест» — научное произведение, в котором построена астрономическая система мира, того, что сейчас называют «системой мира Птолемея», он в течение почти полутора тысяч лет использовался как учебник астрономии.

После выхода в свет «Альмагест» становится основным астрономическим сочинением. В первую очередь идеи Птолемея распространяются на восток: известно, что копии попали в Персию и Индию. После арабских завоеваний середины VII века астрономия начинает активно развиваться в Средней Азии: Багдаде, Хорезме, Дамаске и др. В это время появляется арабский перевод «Альмагеста». Многие ученые, как, например, аль-Хорезми (начало IX в.), аль-Фергани (середина IX в.), аль-Баттани (конец IX в.) и др., подробно излагают основные идеи Птолемея, стараясь сделать изложение более популярным и простым. При этом разрабатываются новые математические методы, в частности, для вычисления сферических тре-

[6] Первоначальное название «Альмагеста» — «Мегале синтаксис», что означает «Большое построение». Впоследствии арабские переводчики в средние века употребили название «Аль Маджести» (или «Величайшее»), от которого и произошло русское название.

[7] Ряд исследователей «Альмагеста» приводят убедительные доказательства, что Птолемей мог подделывать свои и искажать чужие наблюдения для подгонки их к теории.

угольников. Помимо теоретических работ арабские астрономы начинают проводить собственные наблюдения с целью уточнения координат звезд, вошедших в каталог Птолемея.

Начиная с IX в. каталог Птолемея неоднократно перенаблюдался. Упомянем здесь астрономов аль-Баттани (880 г.), ас-Суфи (964 г.), Улугбека (1437 г.). Благодаря повышению точности наблюдений и большой разности эпох аль-Баттани, ас-Суфи получают значение постоянной прецессии с ошибкой $1''$, определяют наклон эклиптики к экватору с ошибкой $6''$.

После завоевания арабами Испании «Альмагест» и книги арабских ученых появились в Европе, где были переведены на латинский язык. По одному из переводов «Альмагеста» (с примечаниями и дополнениями Региомонтана) учился молодой Коперник. В середине XIII в. по указанию короля Альфонса X Кастильского группа астрономов подготовила так называемые «Альфонсовы таблицы», в которые кроме положений планет, моментов восходов и заходов светил, вошел звездный каталог Птолемея, приведенный к эпохе 1252 г.

Годы 1543 и 1609 являются особыми датами в астрономии. В 1543 г. вышла знаменитая книга Коперника «Об обращениях небесных сфер», положившая начало революции в астрономии. В 1609 г. вышла книга Иоганна Кеплера «Новая астрономия», в которой был дан вывод двух законов движения планет вокруг Солнца.

На промежуток между этими двумя датами приходится деятельность датского астронома Тихо Браге (1546–1601), который выполнил огромную по объему работу по накоплению и систематизации точных астрономических наблюдений. Тихо Браге был замечательным наблюдателем. Он составил каталог, содержавший положения 777 звезд с очень высокой для дотелескопической эпохи точностью $\pm 30''$. Впоследствии каталог был расширен до 1005 звезд и опубликован Кеплером в его «Рудольфовых таблицах» в 1627 г. В течение 20 лет Тихо Браге наблюдал Марс, и точные координаты Марса были очень ценным материалом для расчетов Кеплера.

Перед смертью Тихо Браге завещал Кеплеру результаты своих наблюдений, чтобы последний использовал их для подтверждения его гипотезы, согласно которой планеты движутся вокруг Солнца, которое обращается с годичным периодом вокруг неподвижной Земли. Кеплер не выполнил завещания, но всегда подчеркивал особое значение наблюдений Тихо Браге для теории движения планет.

Заслуги Тихо Браге в развитии астрономии не ограничиваются только составлением каталога звезд. На основе расчетов и наблюдений кометы 1577 г. он доказал, что кометы — это небесные тела. Он пишет: «...эта комета находится далеко за Луной, в сфере Венеры, которая помещена астрономами прямо под сферой Солнца и находится на расстоянии от 164 до 1104 земных радиусов от Земли». Это было смелое заявление, так как оно противоречило освященной веками аристотелевской концепции, согласно которой кометы не являются небесными телами, а располагаются в непосредственной близости Земли, в изменчивом «подлунном мире», т. е. в верхних слоях атмосферы. Из наблюдений же Тихо следовало, что комета находится в «надлунном мире», в котором по Аристотелю все вечно, ничего не возникает и ничего не исчезает, и находятся лишь небесные тела — звезды, планеты, Луна и Солнце. К этому открытию Тихо Браге был уже подготовлен: несколько лет назад он наблюдал новую звезду 1572 г. и установил, что она находится среди других звезд, в «надлунном мире».

Большой заслугой Тихо Браге было также исследование явления рефракции в атмосфере Земли, ее влияния на координаты звезд. Результатом работы были таблицы рефракции.

Чтобы повысить точность наблюдений, Тихо использовал новый подход к организации астрономических наблюдений, который заключался в многократном повторении однотипных наблюдений, введении инструментальных поправок, учете рефракции. Высокая точность и большое количество наблюдений Солнца позволили ему определить длину года с ошибкой, меньшей, чем одна секунда. По составленным им таблицам движения Солнца, его положение можно было определить с точностью до $1'$, тогда как до Тихо ошибка могла достигать 15–$20'$.

Тихо Браге оставил последующим поколениям ученых точные и многочисленные наблюдения небесных тел, которые были использованы Кеплером при формулировании законов движения планет. Вывод этих законов был сделан Исааком Ньютоном на основе сформулированных им законов механики и теории всемирного тяготения.

В одно время с Тихо Браге жил Джон Непер (1550–1617). Он известен как изобретатель логарифмов. Непер использовал новый метод для решения ряда задач сферической тригонометрии. С его именем связаны формулы определения двух углов сферического треугольника по противолежащим сторонам и углу между ними, так называемые «аналогии Непера».

В 1609–1610 гг., т. е. практически одновременно с выходом книги Кеплера «Новая астрономия», Галилео Галилей (1564–1642) с помощью построенного им телескопа сделал ряд выдающихся открытий. Открытие спутников Юпитера показало, что не только Земля может быть физическим центром движений во Вселенной. Таким образом, был опровергнут один из догматов, что вращательные движения возможны лишь вокруг покоящегося тела, так как в противном случае спутник отставал бы от движущегося центрального тела. Следовательно, обращение Луны вокруг Земли и движение самой Земли вокруг Солнца вполне могут реализоваться одновременно. Поэтому стало ясно, что критика Коперника, основанная на этом догмате, не имела никакого основания.

Галилей и независимо от него несколько других астрономов обнаружили пятна на Солнце, с помощью которых было открыто вращение Солнца. Но если Солнце вращается, то почему Земля и другие планеты не могут вращаться?

Помимо открытий в астрономии Галилей установил (1636 г.) принцип относительности или принцип физического равноправия всех инерциальных систем отсчета, проявляющийся в том, что законы механики во всех таких системах одинаковы. Отсюда следует, что никакими механическими измерениями, проводящимися в какой-либо инерциальной системе отсчета, нельзя определить покоится данная система или движется прямолинейно и равномерно.

Исаак Ньютон (1643–1727), обобщив результаты исследований Кеплера, Галилея и других ученых, в своем главном труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) сформулировал основные законы классической механики — закон инерции, закон изменения количества движения, закон равенства действия и противодействия — и применил их к теории движения тел. Здесь же он изложил теорию всемирного тяготения и показал, что любые два тела притягиваются с силой, прямо пропорциональной их массам и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними. Закон всемирного тяготения позволил Ньютону не только обобщить законы Кеплера, но объяснить так называемые неравенства в движении Луны, найденные Тихо Браге из наблюдений.

Теоретические работы по изучению вращения Земли также были начаты Ньютоном. Применив законы механики к вращающейся Земле, он пришел к заключению, что Земля должна быть сплющена у полюсов. Как показал Ньютон, прецессия и нутация обусловлены притяжением экваториального избытка масс Земли Луной и Солнцем.

Для решения всех этих задач Ньютону потребовался новый математический аппарат (дифференциальное и интегральное исчисление), основы которого он разработал и без которого современная наука немыслима.

В связи с потребностями мореплавания (необходимостью определения координат кораблей) в XVII веке осознается важность точного измерения времени. В 1656 г. Христианом Гюйгенсом были изобретены маятниковые часы, а в 1675 г. он предложил заменить маятник спиральной пружиной. После этого Гюйгенс обратился к проблеме определения долготы, так как был уверен, что именно с помощью часов — хранителей времени, можно решить сложнейшую проблему навигации — измерение долготы в открытом море.

Насколько остра была эта проблема, говорит решение английского правительства от 1713 года об объявлении премии в 20 тыс. фунтов стерлингов ($\sim$ 1 млн. долларов по сегодняшнему курсу) за способ, позволяющий определить долготу с точностью до половины градуса. В поисках решения приняли участие крупнейшие астрономы XVIII века. Главные усилия были направлены на улучшение теории движения Луны и построение точного каталога звезд. Так, Эйлер составил таблицы, по которым долгота находилась с точностью около градуса, и получил часть премиальной суммы.

Второй способ, предложенный Гюйгенсом, был реализован в 1735 г. Джоном Гаррисоном, который изобрел хронометр. Однако только в 1761 г. его сын Вильям, после ряда усовершенствований хронометра, во время путешествия на Ямайку смог определить долготу корабля с ошибкой 1/3 градуса и окончательно решил эту проблему.

За век до этого события для решения проблемы долготы была основана Гринвичская обсерватория (1675 г.). Благодаря усовершенствованию методов наблюдений, которое произвел первый королевский астроном Джон Флемстид, точность определения координат звезд достигла $\pm 2''$. Для хранения времени были построены самые точные для того времени маятниковые часы, которые показывали среднее солнечное время.

К концу XVIII века механические часы получают повсеместное распространение, их конструкция постоянно совершенствуется, следовательно, растет точность. Ежегодно производится уже примерно 50000 часов.

К середине XIX века в связи с бурным развитием техники, расширением сети железных дорог, люди начинают путешествовать, и, если они передвигаются на значительное расстояние по долготе, вынуждены до двадцати раз переводить часы из-за различия местного времени. Поэтому, независимо в разных странах (Англии, Швеции, Канаде, США и т.д.), вводятся часовые зоны. В 1870 г. школьный учитель Чарльз Доуд из США предложил разделить территорию США на 15-градусные зоны, в каждой из которых время одинаково и меняется на один час на границах зон. Это предложение было в 1884 г. принято на международной конференции в Вашингтоне как определение поясного времени на земном шаре, которое основано на всемирном нулевом меридиане — меридиане Гринвича. На конференции была также определена линия изменения даты.

Прогресс в развитии техники привел к фундаментальным открытиям в астрономии. После изобретения телескопа в XVII веке и усовершенствования его конструкции Ньютоном точность наблюдений стала быстро расти. В 1725 г. английский королевский астроном Джеймс Брадлей открыл явление аберрации света. Причина аберрации заключается в том, что скорость света конечна, а наблюдения проводятся с Земли, движущейся с некоторой скоростью по орбите вокруг Солнца. Фактически это было прямое доказательство того, что Земля перемещается в пространстве. Наблюдения Брадлея были доказательством постулата Коперника: правильнее считать Землю движущейся вокруг Солнца, а не Солнце — вокруг Земли, так как при наблюдении аберрации непосредственно обнаруживается происходящее в течение года изменение направления скорости Земли относительно звезд. С позиций современной науки мы бы сказали, что речь идет о движении Земли относительно квазиинерциальной системы отсчета, которая связана со звездами.

Для того, чтобы сделать это открытие, требовалась высокая точность наблюдений, так как величина постоянной аберрации (отношение скорости Земли к скорости света) равна $\sim 20\overset{\prime\prime}{.}5$. Точность каталогов звезд Дж. Брадлея достигла $\pm 0{,}^{s}16$ по прямому восхождению и $\pm 1{,}''3$ по склонению.

Спустя столетие после открытия аберрации удалось измерить параллаксы ближайших звезд, хотя правильную оценку расстояний до них дал еще Ньютон (см. стр. 319). В 1837 г. Фридрих Бессель из измерений расстояний звезды 61 Лебедя, которая считалась близкой к Земле из-за большой величины собственного движения, до двух соседних (как считалось, более далеких от Земли) звезд, определил ее параллакс ($\sim 0{,}''3$).

Разработка теории, объясняющей результаты наблюдений — это важнейший этап становления науки. Главная задача теории состоит в объяснении результатов наблюдений, например, предсказании положений небесных тел, прецессии и нутации Земли, аберрации и т. д. Этими проблемами были заняты лучшие европейские ученые на протяжении XVIII и XIX веков. Эйлер, Лагранж, Лаплас, Гаусс и другие выдающиеся ученые посвятили многие работы согласованию теории и наблюдений небесных объектов. В процессе решения этой задачи был развит весьма мощный математический аппарат, применяемый в астрономии и теоретической механике. В результате развития теории появились *астрономические эфемериды* — вычисленные значения координат, скоростей, блеска и других параметров небесных тел.

Идеи Ньютона были развиты в трудах Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа, Лапласа. В 1749 г. Даламбер разработал строгую теорию прецессии, которую Ньютон рассмотрел ранее в общих чертах. При этом Даламбер объяснил также явление нутации — периодического колебания земной оси в пространстве (нутация была открыта Брадлеем уже после смерти Ньютона — в 1745 г.). Даламбер показал, что сила, с которой Луна действует на экваториальное утолщение Земли, переменна из-за движения Луны по орбите и поворота самой орбиты. Это создает переменный момент сил, вызывающий нутационное движение земной оси в пространстве, причем главная гармоника, имеющая период 18,6 года, определяется как раз поворотом плоскости лунной орбиты.

Клеро занимался вопросом о фигуре Земли и вывел теорему, которая носит его имя, позволяющую определить сжатие Земли по измерениям силы тяжести на ее поверхности. Лаплас более подробно, чем Даламбер, рассмотрел теорию прецессии и нутации Земли с учетом влияния атмосферы и океанов, построил теорию приливов. Использовав результаты Клеро и изучая фигуры равновесия вращающейся жидкости, Лаплас доказал, что плотность внутри Земли должна увеличиваться к ее центру. В связи с разработкой теории фигур равновесия он ввел понятие потенциала, или силовой функции, которое сразу стало широко использоваться в механике и астрономии. Впервые Лаплас высказал предположение о движении полюса и переменности скорости вращения Земли, т. е. о неравномерности шкал времени, которые основаны на вращении Земли. Из-за недостаточной точности наблюдений в XVIII веке эта гипотеза не могла быть проверена. Многие из работ Лапласа были продолжением и развитием гениальных работ Эйлера, который фактически построил динамику вращающихся тел.

Для проверки результатов теоретических работ требовалось усовершенствование методов наблюдений, а иногда также длительное накопление данных. Многие ученые, начиная с Тихо Браге, завоевали репутацию великих не за новизну открытий, а за точность, полноту полученных рядов и надежность разработанных методов наблюдений.

Благодаря повышению точности наблюдений в конце XIX века было обнаружение движение полюсов Земли, предсказанное Эйлером. Открытие Сэтом Чандлером в 1891 г. колебания полюса с периодом $\sim 1,2$ года, которое впоследствии было названо его именем, послужило толчком к использованию астрометрических наблюдений для изучения строения Земли. Саймону Ньюкомбу принадлежит идея (1892 г.) объяснения чандлеровского колебания влиянием упругости Земли на период свободных эйлеровских колебаний полюса твердой Земли. Он же доказал, что движение полюса не может быть определено из теоретических соображений, что послужило поводом для организации регулярных наблюдений изменений широт. Для этого в 1898 г. была создана Международная служба широты (МСШ). В настоящее время функции МСШ выполняет Международная служба вращения Земли и систем отсчета (МСВЗ).

В конце XIX века была построена теория вращения абсолютно твердой Земли; Оппольцером получены формулы, описывающие изменение координат звезд из-за прецессии и нутации. Благодаря работам Ньюкомба была принята система параметров для описания прецессии, используемая в настоящее время. Наблюдения Луны и

Солнца, их сравнение с теориями движения, которые были разработаны Ньюкомбом, Брауном, де Ситтером, привели к обнаружению векового замедления вращения Земли. Впоследствии теория движения Солнца, созданная Ньюкомбом, была использована для создания первой динамической шкалы времени, известной как шкала эфемеридного времени, и определения эфемеридной секунды. О фундаментальности работы Ньюкомба говорит тот факт, что для построения теории движения Солнца он обработал более 40000 наблюдений Солнца.

В середине XX века были разработаны первые атомные стандарты частоты, на основе показаний которых была построена атомная шкала времени, заменившая шкалу эфемеридного времени. Определение атомной шкалы времени позволило непосредственно измерить неравномерность вращения Земли.

Развитие электроники, радиотехники, компьютерной техники в конце XX века привели к появлению новых методов наблюдений, таких как радиоинтерферометрия со сверхдлинными базами, лазерная дальнометрия. Кроме этих методов для определения системы координат на Земле, построения равномерной шкалы времени и определения координат наблюдателя в земной системе широко используются глобальные спутниковые навигационные системы GPS (Global Positioning System) и ГЛОНАСС (ГЛОбальная НАвигационная Спутниковая Система). Для увеличения точности построения системы координат на небесной сфере, увеличения числа реперных объектов и облегчения доступа потребителей к этой системе в начале XXI века начаты работы над несколькими космическими астрометрическими проектами. Успешное их завершение, безусловно, будет новым этапом в развитии астрометрии.

ОСНОВЫ СФЕРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

1.1. Основные понятия

Одним из главных достижений проекта ГИППАРКОС, осуществленного в 90-х годах XX века, является измерение параллаксов (т. е. расстояний) $\sim$ 120000 звезд. Так как ошибки измерения параллаксов составляют примерно 1 мс дуги, то большая часть этих звезд находится на расстоянии до 1 килопарсека (кпк) от Солнца. Несмотря на то, что объем, в котором расположены эти звезды, составляет очень малую часть от объема нашей Галактики, измерение расстояний является важнейшим результатом проекта, потому что оказалось возможным построить трехмерную картину ближайшей окрестности Солнца.

Если расстояния до небесных объектов неизвестны, то удобно отнести все объекты: звезды, радиоисточники и т. д. на одно и то же расстояние, то есть расположить их на поверхности сферы с центром в точке, где находится наблюдатель. Такая сфера называется *небесной сферой*. Радиус небесной сферы произволен, но удобно для дальнейших вычислений считать его равным единице.

Чтобы знать изменение положения звезды в пространстве, необходимо измерить три компоненты ее скорости. К сожалению, для большинства звезд известны лишь две компоненты скорости в картинной плоскости, то есть в плоскости, перпендикулярной линии, соединяющей наблюдателя и звезду. Удобнее всего считать, что картинная плоскость совпадает с плоскостью, касательной к небесной сфере.

Геометрические построения и вычисления на поверхности сферы отличаются от таковых на плоскости. Поэтому можно говорить о сферической геометрии как о самостоятельном разделе геометрии. Следует заметить, что формулы сферической геометрии справедливы не только для небесной сферы, но и для любой другой сферы (например, при проведении вычислений на земном глобусе). Необходимо лишь учитывать радиус сферы.

Одними из основных понятий планиметрии являются понятия точки и прямой линии. В сферической геометрии аналогом прямой линии как линии с наименьшей длиной, соединяющей две точки, является дуга окружности, образованной пересечением плоскости, проходящей через центр сферы, со сферой. Так как круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью, то дадим следующее определение[1].

Определение 1.1.1. *Любая плоскость, которая проходит через центр сферы и ограничена сферой, называется большим кругом.*

Определение 1.1.2. *Любая плоскость, которая не проходит через центр сферы и ограничена сферой, называется малым кругом.*

Как большой, так и малый круг пересекает сферу по окружности. Очевидно, что любая прямая, лежащая в плоскости большого круга и проходящая через центр сферы, является диаметром сферы. Следовательно, два больших круга пересекаются по диаметру сферы.

Через любые две точки, лежащие на поверхности сферы, можно провести большой круг, и дуга окружности между этими точками является кратчайшим расстоянием между ними на сфере. Это утверждение эквивалентно аксиоме из планиметрии: через любые две точки можно провести прямую линию.

Перпендикуляр к большому кругу, проходящий через центр сферы, пересекает ее в двух точках, называемых *полюсами*.

Рассмотрим сферу с центром в точке O (рис. 1.1).

Проведем большой круг через две точки A и B, лежащие на поверхности сферы, затем проведем перпендикуляр к большому кругу. Полюсы обозначим как P и Z. Через точки P и A, затем через P и B проведем два больших круга.

[1] В учебнике К.А.Куликова «Курс сферической астрономии» дается другое определение: « Круг, плоскость которого проходит через центр сферы, называется большим кругом. Все остальные круги называются малыми кругами».

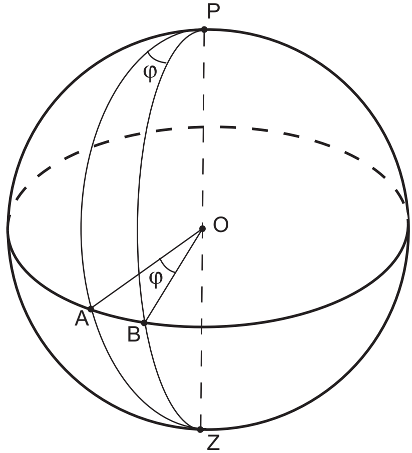

Рис. 1.1. Определение двугранного угла.

Определение 1.1.3. *Угол между двумя большими кругами называется двугранным углом.*

Единицами измерения углов в астрономии являются градусы, радианы, часы. Так как радиус сферы равен единице, то длина дуги $\widehat{AB}$ (рис. 1.1) равна центральному углу AOB, то есть φ, выраженному в радианах. По определению 1 градус (1°) — это центральный угол, равный $1/360$ части окружности. Градус делится на 60 угловых минут ($1^\circ = 60'$), каждая из которых равна 60 угловым секундам ($1' = 60''$), то есть градус состоит из 3600 угловых секунд.

Длина окружности равна 2π радиан, поэтому

$$1 \text{ радиан} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57\overset{\circ}{.}29577951308232 \approx 206264\overset{''}{.}80624709636.$$

В современных астрометрических наблюдениях точность намного превышает $1''$. Поэтому часто используется миллисекунда (мс) дуги, причем 1 мс дуги $= 10^{-3''}$. Чтобы представить себе величину угла в 1 мс дуги, вычислим угловой размер горошины диаметром 5 мм, находящейся на расстоянии, равном 1000 км. Угловой размер горошины равен:

$$\frac{5 \cdot 10^{-3}\text{ м}}{10^6\text{ м}} \times 206264\overset{''}{.}8062 \approx 10^{-3''}.$$

Для измерения углов используются также часы, причем (1^{h}) — это центральный угол, соответствующий $1/24$ части окружности. В одном часе содержится 60 минут или 3600 секунд ($1^{\mathrm{h}} = 60^{\mathrm{m}} = 3600^{\mathrm{s}}$). Очевидно, что $1^{\mathrm{h}} = 15°, 1^{\mathrm{m}} = 15', 1^{\mathrm{s}} = 15''$.

Рассмотрим теперь три точки, которые лежат на сфере и не принадлежат одному большому кругу. Через каждую пару точек можно провести большие круги (рис. 1.2).

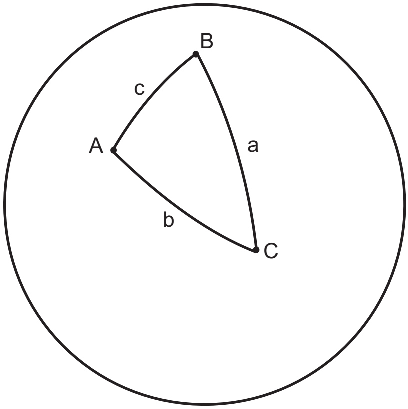

Рис. 1.2. Определение сферического треугольника.

Определение 1.1.4. *Сферическим треугольником называется фигура, образованная тремя дугами окружностей больших кругов, попарно соединяющих три точки.*

Примерами сферических треугольников могут быть треугольники ABP, ABZ (рис. 1.1) и ABC (рис. 1.2).

Обычно углы сферического треугольника обозначают большими буквами, например A, B, C, а стороны, противолежащие углам — соответствующими малыми буквами: $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$ (рис. 1.2). Как и в планиметрии, в сферической геометрии существуют определенные соотношения между сторонами и углами треугольников. Основные формулы, связывающие углы и стороны треугольника, будут выведены в следующем параграфе. Здесь отметим лишь следующие свойства сферических треугольников. Углы A и B в треугольнике ABP (рис. 1.1) – прямые, так как большие круги, проходящие через точки P, A, Z и P, B, Z, перпендикулярны плоскости AOB. Поэтому, поскольку угол $\varphi > 0$, сумма углов сферического треугольника может превышать $180°$. Теперь проведем плоскость через точки A, B, C (рис. 1.2), лежащие на сфере, и параллельно ей плоскость, которая проходит через центр сферы. Очевидно, что вторая плоскость поделит сферу на две полусферы, причем треугольник ABC будет полностью лежать в одной из полусфер. Таким образом, любой из углов сферического треугольника будет меньше $180°$. В пределе (при увеличении каждого из углов до $180°$) сферический треугольник трансформируется в полусферу.

Следующие свойства сферического треугольника аналогичны свойствам плоского треугольника:
а) в каждом сферическом треугольнике против бо̀льшего угла лежит бо̀льшая сторона;
б) сумма любых двух сторон больше третьей стороны.

Найдем площадь сферического треугольника. Для этого рассмотрим треугольник ABC (рис. 1.3). Обозначим его площадь через S.

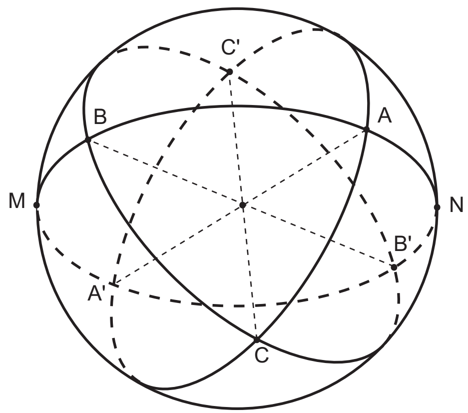

Рис. 1.3. Вычисление площади сферического треугольника.

Плоскость $ABMA'B'N$ делит сферу на две полусферы, в одной из которых и расположен треугольник ABC. Площадь полусферы равна $2\pi R^2$, если радиус сферы равен R. На рис. 1.3 площадь ближней к нам полусферы складывается из площадей следующих фигур: сегмента сферы $ABMA'CA$, сегмента $BCB'NAB$ минус треугольник ABC, сегмента $CA'C'B'C$ минус треугольник $A'B'C'$. Если углы треугольника ABC измеряются в радианах, то площадь каждого из указанных сегментов равна $2AR^2$, $2BR^2$, $2CR^2$, соответственно. Треугольник $A'B'C'$ равновелик заданному треугольнику ABC. Поэтому можно написать уравнение:

$$2\pi R^2 = 2AR^2 + 2BR^2 - S + 2CR^2 - S.$$

Отсюда площадь сферического треугольника ABC равна

$$S = R^2(A + B + C - \pi),$$

где углы A, B, C выражены в радианах.

Определим теперь площадь всей небесной сферы, которую удобно выразить в квадратных градусах. Для этого сначала выразим радиус сферы в градусах: $R = 360°/2\pi$. Тогда площадь всей сферы будет равна

$$4\pi R^2 = 4\pi \left(\frac{360°}{2\pi}\right)^2 \approx 41252,97 \text{ квадратных градусов.}$$

1.2. Скаляры, векторы, тензоры и системы координат

Прежде чем выводить основные формулы сферической геометрии, рассмотрим более общий вопрос: об определении скалярных, векторных и тензорных величин в математике и физике и их связи с системами координат.

Многие физические законы в векторной форме имеют вид:

$$\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}, \tag{1.1}$$

т. е. вектор **a** пропорционален с коэффициентом λ вектору **b**. В качестве примера можно привести закон Ньютона: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ — ускорение **a** тела пропорционально действующей на него силе **F**. Коэффициент пропорциональности равен массе m тела. Согласно (1.1) вектор **a** параллелен вектору **b**, если $\lambda > 0$, и антипараллелен, если $\lambda < 0$.

Введем систему координат с началом в точке O и осями Ox, Oy, Oz. Направления осей задаются векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, соответственно, причем длина каждого вектора считается равной единице. Поэтому они называются единичными векторами. Система координат

$Oxyz$ является прямоугольной (декартовой), если векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ взаимно перпендикулярны.

Определение 1.2.1. *Скалярным произведением* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ *двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется скаляр, равный произведению модулей векторов на косинус угла* γ *между ними:*

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cos\gamma. \tag{1.2}$$

Скалярное произведение векторов обозначается точкой $(\cdot)$, результатом его является скаляр, т. е. величина, характеризуемая только числовым значением. Скалярами, например, являются масса, температура, давление, длина и т. д.

Пусть в системе $Oxyz$ векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ имеют компоненты (декартовы координаты) a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3, причем a_1, b_1 — это проекции векторов на ось Ox, a_2, b_2 — на ось Oy, a_3, b_3 — на ось Oz. Тогда модули векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ равны

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}, \quad b = |\mathbf{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}. \tag{1.3}$$

Из свойств скалярного произведения выделим следующие:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \quad (\beta\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \tag{1.4}$$

где β — скаляр.

Из определения скалярного произведения следует, что оно равно произведению модуля одного вектора на величину проекции другого вектора на первый. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ — углы между вектором и осями системы координат (единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$), соответственно. Используя определение скалярного произведения, находим, что проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси системы координат $Oxyz$ равны

$$a_1 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_1, \quad a_2 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_2, \quad a_3 = |\mathbf{a}| \cos\varphi_3.$$

Косинусы углов между вектором и осями системы координат называются *направляющими косинусами*. Используя определение модуля вектора (1.3), получим, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице:

$$\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_3 = 1.$$

Так как $|\mathbf{i}| = |\mathbf{j}| = |\mathbf{k}| = 1$, то проекции вектора на оси координат равны также:

$$a_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{i}, \quad a_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{j}, \quad a_3 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{k}.$$

Если в формуле (1.2) $\gamma = 90°$, то $c = 0$. Значит два вектора перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю. Используя это свойство, получим:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0.$$

Так как векторы $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ имеют единичную длину, то

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1.$$

Вектор $\mathbf{a}$ может быть выражен через компоненты a_1, a_2, a_3 следующим образом:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}. \tag{1.5}$$

В линейной алгебре выражение (1.5) называется разложением вектора $\mathbf{a}$ по базисным векторам $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Тогда скалярное произведение в декартовых координатах имеет вид:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k})(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \tag{1.6}$$

Так как в дальнейшем мы будем использовать матричные методы вычислений, то следует использовать более общее определение скалярного произведения. Определим матрицу C как таблицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

скаляров $c_{ij}, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$. Элементы c_{ij} называются элементами прямоугольной матрицы C размером $m \times n$, m есть число строк, n — число столбцов матрицы. Матрица размера $m \times 1$ называется вектор–столбцом, а матрица размера $1 \times m$ — вектор–строкой; число m называется размерностью вектора.