
ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Числа и алгебра.....	16
1.1. Основы арифметики	16
1.1.1. Арифметические действия.....	16
1.1.2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное.....	18
1.1.3. Порядок выполнения математических действий и скобки.....	19
1.2. Дроби, десятичные дроби и проценты	20
1.2.1. Дроби.....	20
1.2.2. Отношение и пропорция.....	22
1.2.3. Десятичные дроби.....	23
1.2.4. Проценты.....	25
1.3. Показатели степени и научная форма записи числа	26
1.3.1. Показатели степени.....	26
1.3.2. Обратная величина.....	27
1.3.3. Корень квадратный.....	27
1.3.4. Правила действий со степенями.....	27
1.3.5. Научная форма записи числа.....	29
1.4. Приближенные вычисления и вычисления формул	31
1.4.1. Погрешности и аппроксимации.....	31
1.4.2. Калькулятор.....	32
1.4.3. Таблицы преобразований и диаграммы.....	32
1.4.4. Вычисления формул.....	33
1.5. Алгебра	34
1.5.1. Основные действия.....	34
1.5.2. Правила действий со степенями.....	35
1.5.3. Вынесение общего множителя за скобки.....	37
1.5.4. Основные правила и последовательность выполнения действий.....	37
1.5.5. Прямая и обратная пропорциональность.....	38
1.5.6. Деление многочленов.....	39
1.5.7. Теорема о делении многочлена.....	40
1.5.8. Теорема об остатке.....	42
1.5.9. Непрерывные дроби.....	43
1.6. Простые уравнения	44
1.6.1. Выражения, уравнения и тождества.....	44
1.6.2. Практические задачи с использованием простых уравнений.....	46
1.7. Системы уравнений	48
1.7.1. Введение в теорию систем уравнений.....	48
1.7.2. Практические задачи, требующие решения систем уравнений.....	50
1.8. Преобразование формул	51
1.9. Квадратные уравнения	54
1.9.1. Введение в теорию квадратных уравнений.....	54
1.9.2. Решение методом разложения на множители.....	55
1.9.3. Решение методом дополнения до полного квадрата.....	56
1.9.4. Использование формулы корней квадратного уравнения.....	58
1.9.5. Практические задачи, требующие решения квадратных уравнений.....	59
1.9.6. Система из одного линейного и одного квадратного уравнения.....	60

1.10. Неравенства	60
1.10.1. Введение в теорию неравенств	60
1.10.2. Некоторые простые правила	60
1.10.3. Простые неравенства	61
1.10.4. Неравенства, содержащие модуль	61
1.10.5. Неравенства, содержащие отношения	62
1.10.6. Неравенства, содержащие квадратичные функции	63
1.10.7. Квадратичные неравенства	64
1.10.8. Области	65
1.11. Логарифмы	66
1.11.1. Введение в теорию логарифмов	66
1.11.2. Правила вычисления логарифмов	67
1.11.3. Показательные уравнения	68
1.11.4. Графики логарифмических функций	69
1.12. Экспоненциальные функции	70
1.12.1. Экспоненциальная функция	70
1.12.2. Вычисление экспоненциальных функций	70
1.12.3. Степенной ряд для e^x	71
1.12.4. Графики экспоненциальных функций	72
1.12.5. Натуральные логарифмы	73
1.12.6. Вычисление натуральных логарифмов	73
1.12.7. Законы роста и затухания	74
1.13. Гиперболические функции	76
1.13.1. Введение в теорию гиперболических функций	76
1.13.2. Некоторые свойства гиперболических функций	77
1.13.3. Графики гиперболических функций	78
1.13.4. Гиперболические тождества	79
1.13.5. Решение уравнений, содержащих гиперболические функции	80
1.13.6. Разложение в ряд $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$	81
1.14. Простейшие дроби	82
1.15. Числовые последовательности	86
1.15.1. Простые последовательности	86
1.15.2. n -й член последовательности	86
1.15.3. Арифметические прогрессии	87
1.15.4. Геометрические прогрессии	88
1.16. Биномиальные коэффициенты	90
1.16.1. Треугольник Паскаля	90
1.16.2. Биномиальное разложение	91
1.16.3. Практические задачи с применением биномиальной теоремы	93
1.17. Ряды Маклорена	93
1.17.1. Введение	93
1.17.2. Условия применения рядов Маклорена	94
1.17.3. Примеры по рядам Маклорена с решениями	95
1.17.4. Численное интегрирование с использованием рядов Маклорена	96
1.17.5. Предельные значения	97
1.18. Решение уравнений итеративными методами	98
1.18.1. Введение в теорию итеративных методов	98
1.18.2. Метод деления пополам	99
1.18.3. Алгебраический метод последовательных приближений	101
1.18.4. Метод Ньютона	103
1.19. Системы счисления, используемые в информатике	104
1.19.1. Десятичные и двоичные числа	104

1.19.2. Преобразование двоичных чисел в десятичные	104
1.19.3. Преобразование десятичных чисел в двоичные	105
1.19.4. Преобразование десятичного числа в двоичное через десятичное	106
1.19.5. Шестнадцатеричные числа	107
1.19.6. Преобразование из шестнадцатеричной системы в десятичную	108
1.19.7. Преобразование из десятичной системы в шестнадцатеричную	109
1.19.8. Преобразование из двоичной системы в шестнадцатеричную	110
1.19.9. Преобразование из шестнадцатеричной системы в двоичную	110
Глава 2. Определение длин, площадей и объемов	111
2.1. Площади плоских фигур	111
2.1.1. Свойства четырехугольников	111
2.1.2. Площади плоских фигур	112
2.1.3. Площади подобных фигур	116
2.2. Круг и его свойства	117
2.2.1. Введение	117
2.2.2. Свойства кругов	117
2.2.3. Длина дуги и площадь сектора	119
2.2.4. Уравнение окружности	120
2.3. Объемы простых тел	122
2.3.1. Объемы и площади поверхностей правильных тел	122
2.3.2. Объемы и площади поверхностей усеченных пирамид и конусов	126
2.3.3. Шаровой слой и шаровой пояс	127
2.3.4. Объемы подобных тел	129
2.4. Площади неправильных фигур, объемы неправильных тел	130
2.4.1. Площади неправильных фигур	130
2.4.2. Нахождение объемов неправильных тел с использованием формулы Симпсона	132
2.4.3. Правило призм для определения объемов	133
2.4.4. Средняя величина сигнала	134
Глава 3. Геометрия и тригонометрия	138
3.1. Геометрия и треугольники	138
3.1.1. Единицы измерения углов	138
3.1.2. Виды и свойства углов	139
3.1.3. Свойства треугольников	140
3.1.4. Конгруэнтные треугольники	142
3.1.5. Подобные треугольники	142
3.1.6. Построение треугольников	143
3.2. Введение в тригонометрию	145
3.2.1. Теорема Пифагора	145
3.2.2. Тригонометрические функции острых углов	146
3.2.3. Дробные и иррациональные формы записи тригонометрических величин	148
3.2.4. Решение прямоугольных треугольников	149
3.2.5. Угол места и угол понижения	149
3.2.6. Вычисление тригонометрических функций	151
3.3. Декартовы и полярные координаты	153
3.3.1. Введение	153
3.3.2. Переход из декартовой в полярную систему координат	153
3.3.3. Переход из полярной в декартову систему координат	154
3.3.4. Использование функций калькулятора $R \rightarrow P$ и $P \rightarrow R$	156
3.4. Треугольники и некоторые их практические применения	156

3.4.1. Теоремы синусов и косинусов	156
3.4.2. Площадь треугольника	157
3.4.3. Практические задачи с использованием тригонометрии.....	159
3.5. Тригонометрические кривые	161
3.5.1. Графики тригонометрических функций	161
3.5.2. Углы произвольной величины.....	161
3.5.3. Построение синусоиды и косинусоиды	165
3.5.4. Синусоидальные и косинусоидальные графики.....	166
3.5.5. Периодические функции и период	167
3.5.6. Синусоида вида $A \sin(\omega t \pm \alpha)$	171
3.6. Тригонометрические тождества и уравнения	174
3.6.1. Тригонометрические тождества	174
3.6.2. Тригонометрические уравнения.....	175
3.7. Тригонометрические и гиперболические функции	179
3.7.1. Гиперболические тождества.....	181
3.8. Формулы сложения.....	183
3.8.1. Формулы сложения углов	183
3.8.2. Преобразование $a \sin \omega t + b \cos \omega t$ к виду $R \sin(\omega t + \alpha)$	184
3.8.3. Двойные углы	187
3.8.4. Замена произведения синусов и косинусов на сумму или разность	188
3.8.5. Замена суммы или разности синусов и косинусов на произведение	189
Глава 4. Графики	190
4.1. Прямолинейные графики.....	190
4.1.1. Введение в теорию графиков.....	190
4.1.2. Прямолинейный график	191
4.1.3. Общие правила, которые следует соблюдать при построении графиков	193
4.1.4. Практические задачи, включающие прямолинейные графики... ..	193
4.2. Приведение нелинейных законов в линейную форму	196
4.2.1. Нахождение закона	196
4.2.2. Нахождение законов, содержащих логарифмы	198
4.3. Графики в логарифмических осях.....	202
4.3.1. Логарифмический масштаб.....	202
4.3.2. Графики вида $y = ax^n$	202
4.3.3. Графики вида $y = ab^x$	205
4.3.4. Графики вида $y = ae^{kx}$	205
4.4. Графические методы решения уравнений	207
4.4.1. Графические методы решения систем уравнений	207
4.4.2. Графические методы решения квадратных уравнений	208
4.4.3. Графические методы решения систем, состоящих из линейного и квадратного уравнений	213
4.4.4. Графические методы решения кубических уравнений.....	214
4.5. Кривые в полярных координатах	216
4.6. Функции и их графики.....	223
4.6.1. Стандартные кривые.....	223
4.6.2. Простые преобразования.....	224
4.6.3. Периодические функции.....	229
4.6.4. Непрерывные и разрывные функции	229
4.6.5. Четные и нечетные функции	230
4.6.6. Обратные функции	230
4.6.7. Обратные тригонометрические функции	232

4.6.8. Асимптоты	233
4.6.9. Краткое руководство по построению графиков	236
Глава 5. Векторы	237
5.1. Векторы	237
5.1.1. Введение	237
5.1.2. Сложение векторов	237
5.1.3. Разложение векторов	241
5.1.4. Разность векторов	242
5.1.5. Относительная скорость	245
5.2. Сложение колебаний	246
5.2.1. Сложение двух гармонических функций	246
5.2.2. Построение гармонических функций	247
5.2.3. Отыскание фазовых векторов посредством вычисления	249
5.3. Скалярное и векторное произведения	251
5.3.1. Тройка единичных векторов	251
5.3.2. Скалярное произведение двух векторов	252
5.3.3. Направляющие косинусы	255
5.3.4. Практические применения скалярного произведения	255
5.3.5. Векторное произведение	256
5.3.6. Практическое применение векторного произведения	259
Глава 6. Комплексные числа	260
6.1. Комплексные числа	260
6.1.1. Комплексные числа в декартовой системе координат	260
6.1.2. Комплексная плоскость	261
6.1.3. Сложение и вычитание комплексных чисел	262
6.1.4. Умножение и деление комплексных чисел	262
6.1.5. Комплексные уравнения	263
6.1.6. Полярная форма записи комплексных чисел	263
6.1.7. Умножение и деление в полярной форме	265
6.1.8. Применение комплексных чисел	266
6.2. Теорема Муавра	268
6.2.1. Введение	268
6.2.2. Степени комплексных чисел	268
6.2.3. Корни комплексных чисел	269
6.2.4. Экспоненциальная форма записи комплексного числа	270
Глава 7. Матрицы и детерминанты	273
7.1. Теория матриц и детерминантов	273
7.1.1. Матричная форма записи	273
7.1.2. Сложение, вычитание и умножение матриц	274
7.1.3. Единичная матрица	276
7.1.4. Детерминант матрицы 2×2	276
7.1.5. Обратная матрица 2×2	276
7.1.6. Детерминант матрицы 3×3	277
7.1.7. Обратная матрица 3×3	278
7.2. Решение систем уравнений методом матриц и детерминантов	279
7.2.1. Решение методом матриц	279
7.2.2. Решение методом детерминантов	283
7.2.3. Решение с использованием правила Крамера	286
7.2.4. Решение методом Гаусса	288
Глава 8. Булева алгебра и логические схемы	290
8.1. Булева алгебра	290
8.1.1. Булева алгебра и переключательные схемы	290

8.1.2. Упрощение булевых выражений.....	294
8.1.3. Законы и правила булевой алгебры.....	295
8.1.4. Законы Моргана.....	296
8.1.5. Карты Карно.....	297
8.2. Логические схемы и элементы.....	302
8.2.1. Логические схемы.....	302
8.2.2. Элемент И.....	302
8.2.3. Элемент ИЛИ.....	302
8.2.4. Элемент НЕ.....	303
8.2.5. Элемент И-НЕ.....	303
8.2.6. Элемент ИЛИ-НЕ.....	303
8.2.7. Комбинирование логических схем.....	304
8.2.8. Универсальные логические элементы.....	306
Глава 9. Дифференциальное исчисление.....	310
9.1. Введение в теорию дифференцирования.....	310
9.1.1. Введение в математический анализ.....	310
9.1.2. Функциональное обозначение.....	310
9.1.3. Угол наклона кривой.....	310
9.1.4. Определение производной.....	312
9.1.5. Дифференцирование $y = ax^n$ по общему правилу.....	314
9.1.6. Дифференцирование синусоидальных и косинусоидальных функций.....	314
9.1.7. Дифференцирование e^{ax} и $\ln ax$	317
9.2. Методы дифференцирования.....	318
9.2.1. Дифференцирование часто встречающихся функций.....	318
9.2.2. Производная произведения.....	319
9.2.3. Дифференцирование частного.....	320
9.2.4. Функция от функции.....	321
9.2.5. Последовательное дифференцирование.....	322
9.2.6. Дифференцирование гиперболических функций.....	322
9.3. Некоторые применения производных.....	324
9.3.1. Скорость изменения.....	324
9.3.2. Скорость и ускорение.....	324
9.3.3. Экстремумы.....	326
9.3.4. Процедура нахождения и классификации точек покоя.....	327
9.3.5. Решение практических задач с использованием максимальных и минимальных значений.....	328
9.3.6. Касательные и нормали.....	330
9.3.7. Малые приращения.....	332
9.4. Дифференцирование параметрических уравнений.....	332
9.4.1. Введение.....	332
9.4.2. Некоторые стандартные параметрические уравнения.....	333
9.4.3. Дифференцирование по параметру.....	334
9.5. Дифференцирование неявных функций.....	335
9.5.1. Неявные функции.....	335
9.5.2. Дифференцирование неявных функций.....	336
9.5.3. Дифференцирование неявных функций, содержащих произведения и частные.....	336
9.5.4. Дальнейшее дифференцирование неявных функций.....	337
9.6. Логарифмическое дифференцирование.....	337
9.6.1. Введение в логарифмическое дифференцирование.....	337
9.6.2. Логарифмические законы.....	338
9.6.3. Дифференцирование логарифмических функций.....	338

9.6.4. Дифференцирование $[f(x)]^x$	339
9.7. Дифференцирование обратных тригонометрических и гиперболических функций	340
9.7.1. Обратные функции	340
9.7.2. Дифференцирование обратных тригонометрических функций ..	341
9.7.3. Логарифмическая форма обратных гиперболических функций ..	343
9.7.4. Дифференцирование обратных гиперболических функций	344
9.8. Нахождение частных производных	346
9.8.1. Введение в теорию частных производных	346
9.8.2. Частные производные первого порядка	346
9.8.3. Частные производные второго порядка	347
9.9. Полный дифференциал, скорость изменения и приращения	349
9.9.1. Полный дифференциал	349
9.9.2. Скорость изменения	349
9.9.3. Малые приращения	350
9.10. Экстремумы и седловые точки функций двух переменных	351
9.10.1. Функции двух независимых переменных	351
9.10.2. Максимумы, минимумы и седловые точки	352
9.10.3. Процедура определения максимумов, минимумов и седловых точек функций двух переменных	353
Глава 10. Интегральное исчисление	358
10.1. Введение в теорию интегрирования	358
10.1.1. Процесс интегрирования	358
10.1.2. Общая формула интегралов от ax^n	359
10.1.3. Стандартные интегралы	359
10.1.4. Определенные интегралы	361
10.2. Интегрирование алгебраической подстановкой	362
10.2.1. Введение	362
10.2.2. Алгебраическая подстановка	363
10.2.3. Замена пределов	364
10.3. Тригонометрические и гиперболические подстановки	365
10.4. Интегрирование разложением на простейшие дроби	369
10.4.1. Введение	369
10.4.2. Линейные сомножители	370
10.4.3. Повторяющиеся линейные сомножители	370
10.4.4. Квадратичные сомножители	371
10.5. Подстановка $t = \operatorname{tg} \theta/2$	372
10.6. Интегрирование по частям	374
10.7. Формула понижения степени	377
10.7.1. Введение	377
10.7.2. Использование формулы понижения степени для нахождения интегралов вида $\int x^n e^x dx$	377
10.7.3. Использование формулы понижения степени для нахождения интегралов вида $\int x^n \cos x dx$	378
10.7.4. Использование формулы понижения степени для нахождения интегралов вида $\int x^n \sin x dx$	379
10.7.5. Использование формулы понижения степени для интегрирования выражений вида $\int \sin^n x dx$	379
10.7.6. Использование формулы понижения степени для интегрирования выражений вида $\int \cos^n x dx$	380
10.7.7. Еще одна формула понижения степени	382
10.8. Численное интегрирование	382
10.8.1. Введение	382

10.8.2. Правило трапеций.....	383
10.8.3. Правило прямоугольников.....	384
10.8.4. Правило Симпсона.....	386
10.9. Площади под и между кривыми.....	388
10.9.1. Площадь под кривой.....	388
10.9.2. Площадь между кривыми.....	392
10.10. Среднее и среднее квадратичное значения.....	394
10.10.1. Среднее значение.....	394
10.10.2. Среднее квадратичное значение.....	396
10.11. Объемы тел вращения.....	397
10.12. Центры тяжести простых фигур.....	400
10.12.1. Центры тяжести.....	400
10.12.2. Статический момент площади.....	400
10.12.3. Центр тяжести фигуры, ограниченной кривой и осью x	400
10.12.4. Центр тяжести площади, ограниченной кривой и осью y	402
10.12.5. Теорема Паппа.....	404
10.13. Моменты инерции правильных плоских фигур.....	406
10.13.1. Моменты инерции.....	406
10.13.2. Радиус инерции.....	407
10.13.3. Теорема о параллельных осях.....	408
10.13.4. Теорема о перпендикулярных осях.....	409
Глава 11. Дифференциальные уравнения.....	414
11.1. Общие понятия.....	414
11.1.1. Семейство кривых.....	414
11.1.2. Дифференциальные уравнения.....	414
11.1.3. Разделение переменных.....	415
11.2. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.....	419
11.2.1. Введение.....	419
11.2.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $P(dy/dx) = Q$	419
11.3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	420
11.3.1. Введение.....	420
11.3.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $dy/dx + Py = Q$	422
11.4. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка.....	423
11.4.1. Введение.....	423
11.4.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $a(d^2y/dx^2) + b(dy/dx) + cy = 0$	424
11.5. Неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.....	427
11.5.1. Общее решение однородного уравнения и частное решение неоднородного уравнения.....	427
11.5.2. Процедура решения дифференциальных уравнений вида $a(d^2y/dx^2) + b(dy/dx) + cy = f(x)$	428
11.6. Численное решение дифференциальных уравнений первого порядка.....	432
11.6.1. Введение.....	432
11.6.2. Метод Эйлера.....	433
11.6.3. Усовершенствованный метод Эйлера.....	436
Глава 12. Статистика и теория вероятностей.....	440
12.1. Представление статистических данных.....	440
12.1.1. Некоторые статистические термины.....	440
12.1.2. Представление несгруппированных данных.....	441
12.1.3. Процентная диаграмма.....	443

12.1.4. Представление группированных данных	445
12.2. Меры среднего значения и дисперсии	449
12.2.1. Меры центральной частоты	449
12.2.2. Среднее, медиана и мода для дискретных данных	450
12.2.3. Среднее значение, медиана и мода для группированных данных	451
12.2.4. Гистограмма	452
12.2.5. Среднее квадратичное отклонение для дискретных данных	453
12.2.6. Среднее квадратичное отклонение для группированных данных	455
12.2.7. Квартили, децили и перцентили	456
12.3. Теория вероятностей	457
12.3.1. Введение в теорию вероятностей	457
12.3.2. Законы действий с вероятностями	458
12.4. Биномиальное распределение и распределение Пуассона	461
12.4.1. Биномиальное распределение	461
12.4.2. Отбраковка в промышленности	462
12.4.3. Распределение Пуассона	463
12.5. Нормальное распределение	465
12.5.1. Введение в теорию нормального распределения	465
12.5.2. Признаки нормального распределения	469
12.6. Линейная корреляция	471
12.6.1. Введение	471
12.6.2. Формула смешанных моментов для определения коэффициента линейной корреляции	472
12.6.3. Значимость коэффициента корреляции	474
12.7. Линейная регрессия	474
12.7.1. Введение в линейную регрессию	474
12.7.2. Линейная регрессия методом наименьших квадратов	475
12.8. Теория выборок и оценок	477
12.8.1. Введение	477
12.8.2. Выборочное распределение	478
12.8.3. Выборочное распределение средних значений	478
12.8.4. Оценка параметров совокупности по выборке большого размера	482
12.8.5. Оценка среднего значения совокупности, если известно среднее квадратичное отклонение совокупности	484
12.8.6. Оценка среднего значения и среднего квадратичного отклонения совокупности по выборочным данным	486
12.8.7. Оценка среднего значения совокупности по выборке малого размера	488
Глава 13. Преобразования Лапласа	492
13.1. Введение в теорию преобразования Лапласа	492
13.1.1. Введение	492
13.1.2. Определение преобразования Лапласа	492
13.1.3. Линейность преобразования Лапласа	493
13.1.4. Преобразование Лапласа от элементарных функций	493
13.2. Свойства преобразований Лапласа	495
13.2.1. Преобразование Лапласа от $e^{at}f(t)$	495
13.2.2. Преобразования Лапласа от функций вида $e^{at}f(t)$	495
13.2.3. Преобразования Лапласа для производных	496
13.2.4. Теоремы о начальном и конечном значениях	497
13.3. Обратное преобразование Лапласа	498

13.3.1. Определение обратного преобразования Лапласа.....	498
13.3.2. Обратное преобразование Лапласа от элементарных функций..	499
13.3.3. Обратное преобразование Лапласа с использованием простейших дробей	500
13.4. Решение дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа	502
13.4.1. Введение	502
13.4.2. Процедура решения дифференциальных уравнений с использованием преобразования Лапласа	502
13.5. Решение систем дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа	504
13.5.1. Введение	504
13.5.2. Процедура решения систем уравнений с использованием преобразования Лапласа	505
Глава 14. Ряды Фурье.....	508
14.1. Ряды Фурье периодических функций с периодом 2π.....	508
14.1.1. Введение	508
14.1.2. Периодические функции	508
14.1.3. Ряды Фурье	509
14.2. Ряды Фурье непериодических функций в диапазоне 2π.....	513
14.2.1. Разложение непериодических функций	513
14.3. Ряды Фурье четных и нечетных функций на полупериоде	515
14.3.1. Четные и нечетные функции	515
14.3.2. Разложение в ряд Фурье по косинусам	516
14.3.3. Разложение в ряд Фурье по синусам	517
14.3.4. Ряд Фурье на полупериоде	518
14.4. Ряд Фурье для произвольного интервала	521
14.4.1. Разложение периодической функции с периодом L	521
14.4.2. Ряд Фурье на полупериоде для функций, заданных в интервале L	523
14.5. Численные методы гармонического анализа	525
14.5.1. Введение	525
14.5.2. Гармонический анализ информации, представленной в табличной или графической форме	525
14.5.3. Рассуждения о сложных колебаниях	530

ПРЕДИСЛОВИЕ

Карманный справочник по инженерной математике — доступный источник основных инженерных математических формул, определений и базовой информации, необходимых студентам, техническим специалистам и инженерам в процессе обучения и/или работы. Это уникальная по своему содержанию и структуре книга: в ней можно найти ответ практически на любой вопрос.

Для удобства материал разделен на 14 глав, включающих арифметику и алгебру, геометрию и тригонометрию, графики, векторы, комплексные числа, матрицы и детерминанты, булеву алгебру и логические схемы, дифференциальное и интегральное исчисление, дифференциальные уравнения, статистику и теорию вероятностей, преобразования Лапласа и ряды Фурье. Книга содержит 93 раздела и более 400 числовых примеров, а также более 300 рисунков.

Числа и алгебра

1.1. ОСНОВЫ АРИФМЕТИКИ

1.1.1. Арифметические действия

Числа вида 3, 5, 72, используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называют *натуральными*. Натуральные числа 3, 5, 72 называют также *положительными целыми числами*. Числа -13 , -6 , -5 , противоположные натуральным, называют *отрицательными целыми числами*. Число 0 также считается целым числом. Итак, целые числа — это натуральные числа, числа, противоположные натуральным, и число 0.

Существуют четыре базовых арифметических действия: сложение (+), вычитание (−), умножение (×) и деление (:).

Сложение любого числа с отрицательным числом равносильно вычитанию из этого числа равного по величине, но взятого с противоположным знаком числа. Так, например, при сложении -4 и 3 получаем $3 - 4 = -1$.

Вычитание отрицательного числа равносильно сложению с соответствующим положительным числом. Так, например, при вычитании -4 из 3 получаем $3 - (-4) = 3 + 4 = 7$.

При умножении и делении чисел с противоположными знаками результат действия отрицательный; при умножении и делении чисел с одинаковыми знаками результат положительный. Так, например, $3 \times (-4) = -12$; $(-3) \times (-4) = 12$.

$$\text{Аналогично } \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3} \text{ и } \frac{-4}{-3} = +\frac{4}{3}.$$

Пример. Сложить 27, -74 , 81 и -19 .

Сначала складываем положительные целые: 27 и 81. Сумма положительных целых будет равна $27 + 81 = 108$. Затем складываем отрицательные целые: -74 и -19 . Сумма отрицательных целых будет равна -93 . Теперь вычитаем сумму отрицательных целых чисел, т. е. -93 , из суммы положительных целых чисел 108 и получаем 15. Таким образом, $27 - 74 + 81 - 19 = 15$.

Пример. Вычесть 89 из 123, что математически записывается в виде $123 - 89$, или

$$\begin{array}{r} 123 \\ - 89 \\ \hline 34 \end{array}$$

Следовательно, $123 - 89 = 34$.

Пример. Умножить 74 на 13, что математически записывается в виде 74×13 .

$$\begin{array}{r} \times 74 \\ 13 \\ \hline 222 \\ 740 \\ \hline 962 \end{array} \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \leftarrow 74 \times 3 \\ \leftarrow 74 \times 10 \end{array} \right\} \text{ Умножаем} \end{array} \right\} \text{ Складываем}$$

Следовательно, $74 \times 13 = 962$.

При делении на число от 1 до 12, как правило, используется так называемый *сокращенный способ деления*, или *ускоренное деление*, т. е. *деление в строчку*.

Пример. Разделить 1043 на 7.

$$10^3 4^6 3 : 7 = 149.$$

Шаг 1. Делим 10 на 7. Получаем 1 и остаток 3. Пишем 1 в ответ, а остаток 3 записываем в следующий разряд справа над цифрой 0. Получаем 34.

Шаг 2. Делим 34 на 7. Получаем 4 и остаток 6. Пишем 4 в ответ, а остаток 6 записываем в следующий разряд справа над цифрой 4. Получаем 63.

Шаг 3. Делим 63 на 7. Получаем 9 и остаток 0. Пишем 9 в ответ. Получаем 149, т. е. $1043 : 7 = 149$.

При делении на число больше 12 обычно используется метод *деления в столбик*, или *деление углом*.

Пример. Разделить 378 на 14.

$$\begin{array}{r} 378 \overline{) 14} \\ 28 \\ \hline 98 \\ 98 \\ \hline 0 \end{array}$$

(2) $2 \times 14 \rightarrow 28$

(4) $7 \times 14 \rightarrow 98$

Шаг 1. Делим 37 на 14, получаем 2. Пишем 2 в ответ.

Шаг 2. Умножаем 2 на 14, получаем 28.

Шаг 3. Вычитаем 28 из 37, получаем 9. Оставшуюся цифру 8 записываем справа от 9. Получаем 98.

Шаг 4. Делим 98 на 14. Получаем 7. Записываем 7 в ответ. Следовательно, $378 : 14 = 27$.

Шаг 5. Вычитаем. Получаем 0. Деление закончено.
Итак, $378 : 14 = 27$.

1.1.2. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

При перемножении двух и более чисел каждое отдельно взятое число называется *множителем*.

Делитель — число, на которое другое число делится без остатка. *Наибольший общий делитель* — наибольшее число, на которое два или более числа делятся без остатка.

Чтобы найти наибольший общий делитель чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение тех множителей, которые входят во все разложения, взяв каждый наименьшее число раз, какое он встречается.

Пример. Найти наибольший общий делитель чисел 12, 30 и 42.

Разложим эти числа на простые множители, т. е. 2, 3, 5, 7, 11, 13... (на какие возможно):

$$\begin{aligned} 12 &= \boxed{2} \times 2 \times 3 \\ 30 &= \boxed{2} \quad \times 3 \times 5 \\ 42 &= \boxed{2} \quad \times 3 \times 7 \end{aligned}$$

Общими делителями этих чисел являются 2 в первом столбце и 3 в третьем. Следовательно, *наибольший общий делитель* равен 2×3 , т. е. **6**. Таким образом, **6** есть *наибольшее число*, на которое делится и **12**, и **30**, и **42**.

Кратное — число, которое определенное количество раз содержит другое число. *Наименьшее общее кратное* — наименьшее число, делимое на каждое из двух и более чисел без остатка.

Чтобы определить наименьшее кратное двух или более чисел, надо разложить эти числа на простые множители и найти произведение всех получившихся множителей, взяв каждый наибольшее число раз, какое он встречается.

Пример. Найти наименьшее общее кратное чисел 12, 42 и 90.

Разложим эти числа на простые множители:

$$\begin{aligned} 12 &= \boxed{2 \times 2} \times 3 \\ 42 &= 2 \quad \times 3 \quad \quad \times \boxed{7} \\ 90 &= 2 \quad \times \boxed{3 \times 3} \times \boxed{5} \end{aligned}$$

Наибольшее число раз встречаются множители, заключенные в рамки, т. е. 2×2 для 12, 7 для 42 и 3×3 и 5 для 90. Следовательно, наименьшее общее кратное будет равно $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 = 1260$. Это число одновременно является наименьшим числом, которое будет делиться без остатка на 12, 42 и 90.

1.1.3. Порядок выполнения математических действий и скобки

Если какое-либо арифметическое действие необходимо выполнить первым, его числа и оператор (операторы) заключают в скобки. Так, разность 6 и 2, умноженная на 3, записывается в виде $3 \times (6 - 2)$, или $3(6 - 2)$.

Арифметические действия выполняются в следующей последовательности: (1) действия, заключенные в скобки, (2) деление и умножение и (3) сложение и вычитание.

Поясним основные свойства, или основные законы, алгебры на примерах.

Переместительный закон

$2 + 3 = 3 + 2$, т. е. при сложении порядок следования чисел не влияет на результат.

$2 \times 3 = 3 \times 2$, т. е. при умножении порядок следования чисел не влияет на результат.

Сочетательный закон

$2 + (3 + 4) = (2 + 3) + 4$, т. е. использование скобок при сложении не влияет на результат.

$2 \times (3 \times 4) = (2 \times 3) \times 4$, т. е. использование скобок при умножении не влияет на результат.

Распределительный закон

$2 \times (3 + 4) = 2(3 + 4) = 2 \times 3 + 2 \times 4$, т. е. число, стоящее перед скобками, указывает на то, что каждое из слагаемых в скобках должно быть умножено на это число.

Использование скобок

$(2 + 3)(4 + 5) = (5)(9) = 45$, т. е. рядом стоящие скобки означают умножение.

$2[3 + (4 \times 5)] = 2[3 + 20] = 2 \times 23 = 46$, т. е., если выражение содержит внешние и внутренние скобки, сначала вычисляется выражение во внутренних скобках.

Пример. Определить значение выражения $6 + 4 : (5 - 3)$.

$$\begin{aligned} 6 + 4 : (5 - 3) &= 6 + 4 : 2(\text{скобки}), \\ &= 6 + 2(\text{деление}), \\ &= 8(\text{сложение}). \end{aligned}$$

Пример. Вычислить $13 - 2 \times 3 + 14 : (2 + 5)$.

$$\begin{aligned} 13 - 2 \times 3 + 14 : (2 + 5) &= 13 - 2 \times 3 + 14 : 7(\text{скобки}), \\ 13 - 2 \times 3 + 14 : 7 &= 13 - 2 \times 3 + 2(\text{деление}), \\ 13 - 2 \times 3 + 2 &= 13 - 6 + 2(\text{умножение}), \\ 13 - 6 + 2 &= 15 - 6(\text{сложение}), \\ 15 - 6 &= 9(\text{вычитание}). \end{aligned}$$

1.2. ДРОБИ, ДЕСЯТИЧНЫЕ ДРОБИ И ПРОЦЕНТЫ

1.2.1. Дроби

Деление 2 на 3 может быть записано в виде $\frac{2}{3}$, или $2/3$, где $\frac{2}{3}$ — *дробь*. Число над чертой, т. е. 2, называется *числителем*, число под чертой, т. е. 3, называется *знаменателем*.

Если величина числителя меньше величины знаменателя, такая дробь называется *правильной*. Следовательно, $\frac{2}{3}$ — *правильная дробь*.

Если величина числителя больше величины знаменателя, такая дробь называется *неправильной*. Так, $\frac{7}{3}$ — *неправильная дробь* и может быть выражена в виде *смешанного числа*, т. е. в виде целой и дробной частей. Неправильная дробь $\frac{7}{3}$ соответствует смешанному числу $2\frac{1}{3}$.

Если при делении числителя и знаменателя на одно и то же число дробь упрощается, такая процедура называется *сокращением*. Сокращение на 0 недопустимо.

Пример. Упростить $\frac{1}{3} + \frac{2}{7}$.

Наименьшее общее кратное двух знаменателей есть 3×7 , т. е. 21. Приведем каждую дробь к знаменателю 21:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \left(\frac{1}{3} \times \frac{7}{7}\right) + \left(\frac{2}{7} \times \frac{3}{3}\right).$$

В результате получаем $\frac{7}{21} + \frac{6}{21}$ или $\frac{7+6}{21} = \frac{13}{21}$.

Следовательно,

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{(7 \times 1) + (3 \times 2)}{21}$$

Шаг (2) Шаг (3)
 ↓ ↓
 Шаг (1)

Шаг 1. Вычислим наименьшее общее кратное двух знаменателей.

Шаг 2. (Для дроби $\frac{1}{3}$.) Делим 21 на 3. Получаем 7. Следовательно, числитель надо умножить на 7, т. е. 7×1 .

Шаг 3. (Для дроби $\frac{2}{7}$.) Делим 21 на 7. Получаем 3. Следовательно, числитель надо умножить на 3: 3×2 .

В результате получаем **тот же результат, что и ранее**, т. е.

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{7} = \frac{7+6}{21} = \frac{13}{21}.$$

Пример. Вычислить $3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6}$.

Способ 1. Разобьем смешанные числа на целые и дробные части:

$$\begin{aligned} 3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6} &= \left(3 + \frac{2}{3}\right) - \left(2 + \frac{1}{6}\right) = 3 + \frac{2}{3} - 2 - \frac{1}{6} = \\ &= 1 + \frac{4}{6} - \frac{1}{6} = 1\frac{3}{6} = 1\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Способ 2. Выразим смешанные числа в виде неправильных дробей. Поскольку $3 = \frac{9}{3}$, а $2 = \frac{12}{6}$, то

$$3\frac{2}{3} = \frac{9}{3} + \frac{2}{3} = \frac{11}{3} \text{ и } 2\frac{1}{6} = \frac{12}{6} + \frac{1}{6} = \frac{13}{6}.$$

В результате получаем **тот же результат, что и ранее**, т. е.

$$3\frac{2}{3} - 2\frac{1}{6} = \frac{11}{3} - \frac{13}{6} = \frac{22}{6} - \frac{13}{6} = \frac{9}{6} = 1\frac{1}{2}.$$

Пример. Вычислим $\frac{3}{7} \times \frac{14}{15}$.

Делим числитель и знаменатель на 3. Получаем

$$\frac{\cancel{3}}{7} \times \frac{14}{\cancel{15}_5} = \frac{1}{7} \times \frac{14}{5} = \frac{1 \times 14}{7 \times 5}.$$

Делим числитель и знаменатель на 7. Получаем

$$\frac{1 \times \cancel{14}}{\cancel{7} \times 5} = \frac{1 \times 2}{1 \times 5} = \frac{2}{5}.$$

Следовательно, $\frac{3}{7} \times \frac{14}{15} = \frac{2}{5}$.

Деление числителя и знаменателя на одно и то же число называется *сокращением*. Это действие можно выполнить и так:

поменять во второй дроби местами числитель и знаменатель и заменить деление умножением.

Пример. Разделим $\frac{3}{7} : \frac{12}{21}$.

Запишем эту дробь иначе: $\frac{3}{7} : \frac{12}{21} = \frac{3}{7} \cdot \frac{21}{12}$.

Умножение числителя и знаменателя на величину, обратную знаменателю, дает

$$\frac{3}{7} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{21^3}{\cancel{21}_4}}{\overset{1}{\cancel{7}} \times \overset{12^4}{\cancel{12}_1}} = \frac{3}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\frac{12}{21} = \frac{\overset{1}{\cancel{12}} \times \overset{21^1}{\cancel{21}_4}}{\overset{1}{\cancel{21}} \times \overset{12^1}{\cancel{12}_1}}$$

т. е. получаем тот же результат, что и при сокращении обычным

способом: $\frac{3}{7} \div \frac{12}{21} = \frac{\overset{1}{\cancel{3}} \times \overset{21^3}{\cancel{21}_4}}{\overset{1}{\cancel{7}} \times \overset{12^4}{\cancel{12}_1}} = \frac{3}{4}$.

1.2.2. Отношение и пропорция

Отношение одной величины к другой есть дробь; оно показывает, сколько раз одна величина содержится в другой величине *того же вида*.

Если одна величина *прямо пропорциональна* другой, то при удваивании первой величины вторая также удваивается. Если одна величина *обратно пропорциональна* другой, то при удваивании одной из величин другая в 2 раза уменьшается.

Пример. Брус длиной 273 см разрезали на три части, отношение между длинами которых 3 : 7 : 11. Определить длину каждой части бруса.

Общее число частей $3 + 7 + 11 = 21$. Следовательно, 21 часть соответствует 273 см.

1 часть соответствует $\frac{273}{21} = 13$ см.

3 части соответствуют $3 \times 13 = 39$ см.

7 частей соответствуют $7 \times 13 = 91$ см.

11 частей соответствуют $11 \times 13 = 143$ см.

Итак, длина трех частей равна соответственно **39, 91 и 143 см.**

Проверка. $39 + 91 + 143 = 273$.

Пример. Зубчатое колесо (шестерня) с 80 зубьями находится в зацеплении с шестерней с 25 зубьями. Определить передаточное отношение.

Передаточное отношение определяется так:

$$\text{Передаточное отношение} = 80 : 25 = \frac{80}{25} = \frac{16}{5} = 3.2,$$

т. е. передаточное отношение = **16 : 5** или **3.2 : 1**.

Пример. Сплав состоит из металлов *A* и *B*, соотношение их масс равно 2.5:1. Определить, какое количество металла *A* надо добавить к 6 кг металла *B* для получения такого сплава.

$$\text{Отношение } A : B = 2.5 : 1, \text{ т. е. } \frac{A}{B} = \frac{2.5}{1} = 2.5.$$

Следовательно, если $B = 6$ кг, $\frac{A}{6} = 2.5$, имеем $A = 6 \times 2.5 = \mathbf{15}$ кг.

Пример. Три человека могут выполнить работу за 4 часа. Определить, сколько времени потребуется 5 рабочим для выполнения той же задачи при условии, что производительность труда остается прежней.

Чем больше рабочих, тем быстрее выполняется работа. Следовательно, здесь имеет место обратно пропорциональная зависимость:

3 человека выполняют работу за 4 часа,

1 человек выполняет работу за время, втрое большее, т. е. за $4 \times 3 = 12$ часов,

5 человек могут сделать работу в 5 раз быстрее, чем один человек, т. е. за $\frac{12}{5}$ часов, или **2 часа 24 минуты**.

1.2.3. Десятичные дроби

Десятичная система исчисления основана на *цифрах* от 0 до 9. Число типа 53.17 — *десятичная дробь*, точка отделяет целую часть 53 от дробной части 0.17.

Число, которое может быть точно выражено в виде десятичной дроби, называют *конечной десятичной дробью*, а число, которое не может быть точно выражено в виде десятичной дроби, —

бесконечной десятичной дробью. Таким образом, $\frac{3}{2} = 1.5$ — это

конечная десятичная дробь, а $\frac{4}{3} = 1.33333\dots$ — бесконечная

десятичная дробь. Число 1.33333... можно записать в виде 1.3(3), т. е. «одна целая, три в периоде».

В зависимости от требуемой точности бесконечная десятичная дробь может быть записана двумя способами: (1) с точностью до некоторого количества *значащих цифр*, т. е. цифр, которые что-то означают, и (2) с точностью до определенного *десятичного разряда*, т. е. определенного количества знаков после десятичной точки.

Цифра последнего десятичного разряда в ответе не меняется, если справа за ней стоит цифра 0, 1, 2, 3 или 4; и она увеличивается на 1, если справа стоит цифра 5, 6, 7, 8 или 9. Таким образом, бесконечная дробь 7.6183 при округлении до третьей значащей цифры превращается в 7.62, так как дальше справа стоит цифра 8, принадлежащая группе 5, 6, 7, 8, 9. При округлении до третьего десятичного разряда 7.6183 превращается в 7.618, поскольку справа от цифры 8 стоит цифра 3.

Пример. Вычислить $42.7 + 3.04 + 8.7 + 0.06$.

Запишем числа таким образом, чтобы точки находились друг под другом. Будем складывать числа в каждом столбце и начнем справа:

$$\begin{array}{r} 42.7 \\ + 3.04 \\ 8.7 \\ 0.06 \\ \hline 54.50 \end{array}$$

В результате получаем $42.7 + 3.04 + 8.7 + 0.06 = 54.50$.

Пример. Вычислить 74.3×3.8 .

При умножении десятичных дробей числа перемножаются так, как если бы они были целыми, т. е.

$$\begin{array}{r} 743 \\ \times 38 \\ \hline 5944 \\ + 22290 \\ \hline 28234 \end{array}$$

Положение десятичной точки определяется общим количеством знаков справа после десятичной точки в обоих сомножителях. Здесь в двух перемножаемых числах $(1 + 1) = 2$ знака после десятичной точки ($74.\underline{3} \times 3.\underline{8}$).

Следовательно, $74.\underline{3} \times 3.\underline{8} = 282.34$.

Пример. Вычислить $37.81 : 1.7$ с точностью до 4 значащих цифр и 4 десятичного разряда.

Умножаем знаменатель на 10. Умножаем также числитель на 10, чтобы сохранить значение дроби. Получаем в знаменателе

$$\text{целое число, т. е. } 37.81 : 1.7 = \frac{37.81 \times 10}{1.7 \times 10} = \frac{378.1}{17}.$$

Деление в столбик десятичных дробей аналогично делению в столбик целых чисел, поэтому покажем только первые четыре шага:

$$\begin{array}{r}
 -378.100000 \quad | \begin{array}{l} 17 \\ \hline 22.24117... \end{array} \\
 \underline{-34} \\
 -38 \\
 \underline{-34} \\
 -41 \\
 \underline{-34} \\
 -70 \\
 \underline{-68} \\
 20...
 \end{array}$$

Итак, $37.81:1.7 = 22.24$ с точностью до 4 значащих цифр;
 $37.81:1.7 = 22.2412$ с точностью до 4 десятичного разряда.

Пример. Преобразовать 0.4375 в правильную дробь.

Дробь 0.4375 можно без изменения ее значения записать в виде $\frac{0.4375 \times 10000}{10000}$.

Таким образом, $0.4375 = \frac{4375}{10000}$.

Сокращая, получаем $\frac{4375}{10000} = \frac{875}{2000} = \frac{175}{400} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$.

Таким образом, $0.4375 = \frac{7}{16}$.

|| *Для преобразования правильной дроби в десятичную надо разделить числитель на знаменатель.*

Пример. Выразить $\frac{9}{16}$ в виде десятичной дроби.

Деление на 16 можно осуществить в столбик, а можно просто сократить дробь на 2 ($9/2 = 4.50$), потом на 8 ($4.50/8 = 0.5625$).

Итак, $\frac{9}{16} = 0.5625$.

1.2.4. Проценты

Десятичная дробь 0.01, т. е. дробь с числом 100 в знаменателе, называется *процентом*. Проценты используются в качестве общепринятого стандарта. Например, 25 процентов означает $\frac{25}{100}$,

т. е. $\frac{1}{4}$, и записывается как 25%.

Пример. Выразить в процентах 0.0125.

Десятичную дробь можно преобразовать в проценты, умножив ее на 100. Следовательно, 0.0125 соответствует $0.0125 \times 100\%$, т. е. **1.25%**.